5. MODELOS CONVEXOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO: EL MODELO *AK*

1. El modelo de las familias productoras

En este capítulo estudiaremos el modelo de crecimiento endógeno más simple, el modelo AK. Aunque algunos economistas utilizaron en un momento u otro algún tipo de tecnologías lineales (véase por ejemplo Von Neuman (1937), Eaton (1981), o Cohen y Sachs (1986)), la introducción del modelo lineal a la nueva literatura de crecimiento endógeno de los años ochenta se atribuye a Rebelo (1991). En este modelo, se postula la existencia de una función de producción que es lineal en el único factor de producción, el capital. Por este motivo, la función de producción posee simultáneamente las propiedades de rendimientos constantes de escala y rendimientos constantes del capital,

$$Y = F(K, L) = AK, \tag{5.1}$$

siendo A una constante exógena y K el capital agregado, definido de una manera amplia. Supongamos, en primer lugar, un contexto en el que las familias dedicadas a la producción de bienes maximizan una función de utilidad de horizonte infinito, similar a (3.1),

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \left(\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \right) dt, \tag{5.2}$$

en la cual ρ es la tasa de descuento, n es la tasa constante de crecimiento de la población y σ es la inversa de la elasticidad de sustitución, que también es constante y recoge el mayor o menor interés de los individuos por suavizar su consumo a través del tiempo (véase el capítulo 3 para una discusión más detallada de esta función de utilidad).

Imaginemos que nos encontramos en una economía cerrada y sin gobierno por lo que el ahorro bruto debe ser igual a la inversión bruta. La inversión bruta, a su vez, es igual al aumento neto del stock de capital más la depreciación total. Puesto que la tasa de depreciación es constante, la función de acumulación de la economía puede expresarse, en términos per cápita, de la siguiente forma:

$$\dot{k} = Ak - c - (\delta + n)k. \tag{5.3}$$

La ecuación (5.3) corresponde a la anterior (3.5), con la única diferencia de que, en ésta, la tecnología viene dada por la función Ak, en lugar de por $f(k)$. Las familias de este modelo maximizan (5.2) sujetas a la restricción que les impone (5.3) y tomando el volumen de capital inicial k_0 como dado. Para solucionar este problema, debemos construir el Hamiltoniano

$$H(\,) = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \nu\left(Ak - c - (\delta+n)k\right). \tag{5.4}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$e^{-(\rho-n)t}c^{-\sigma} = \nu \tag{5.5}$$

$$\dot{\nu} = -\,\nu[A - (\delta + n)] \tag{5.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} \nu_t k_t = 0. \tag{5.7}$$

Tal como se hizo en el capítulo 2, se puede utilizar (5.5) para obtener la tasa de crecimiento del consumo tomando logaritmos, derivando respecto del tiempo y sustituyendo el resultado en (5.6).

Obtenemos de este modo el siguiente resultado:

$$\dot{c}/c = \gamma_c = [A - \rho - \delta]/\sigma. \tag{5.8}$$

Obsérvese que (5.8) indica que el consumo crece a una tasa constante en todo momento. Para que puedan obtenerse tasas positivas de crecimiento, es necesario suponer que $A > \rho + \sigma$. Para entender esta ecuación de forma intuitiva, la reescribimos de la siguiente forma:

$$\gamma_c\sigma + \rho = A - \delta. \tag{5.9}$$

Una vez más, el miembro de la izquierda de (5.9) es el beneficio obtenido del consumo y el miembro de la derecha recoge el beneficio o rendimiento obtenido de la inversión. El beneficio del consumo depende de la tasa de descuento (que refleja el hecho de que los individuos prefieren consumir cuanto antes mejor) y de la tasa de crecimiento, que se tiene en cuenta para lograr un consumo lo más liso posible. En efecto, si la tasa de crecimiento es positiva, la gente está dispuesta a desplazar una parte del consumo que realizará en el futuro al presente para lograr así un consumo más liso. El miembro de la derecha es el rendimiento de la inversión, que se reduce a la productividad marginal neta del capital y es igual por lo tanto a $A - \delta$ (dado que no existen costes de ajuste ni fenómenos de rendimientos decrecientes del capital, este rendimiento es independiente de la tasa de crecimiento o del stock de capital).

Para calcular la tasa de crecimiento del capital per cápita, dividimos por k los dos miembros de la ecuación dinámica (5.3), y así obtenemos que

$$\dot{k}/k \equiv \gamma_k = A - c/k - (\delta + n). \tag{5.10}$$

En el estado estacionario, la tasa de crecimiento del capital γ_k^* es constante. Si se llevan todos los términos constantes de (5.10) a un lado de la expresión y se toman logaritmos y derivadas del tiempo, llegamos a la conclusión de que $\gamma_c^* = \gamma_k^* \equiv \gamma^*$. Dado que la producción de la economía es proporcional a k, la tasa de crecimiento de y es igual a la tasa de crecimiento de k, por lo que $\gamma_y^* = \gamma^*$. En otras palabras, las tasas de crecimiento de estado estacionario del consumo, el capital y la producción per cápita son idénticas,

$$\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma_y^* \equiv \gamma^*, \tag{5.11}$$

y vienen dadas por (5.8). La ecuación (5.6) nos muestra que el precio implícito ν crece a una tasa constante igual a $A - \delta - n$. De este modo, su evolución temporal viene dada por la expresión $\nu_t = \nu(0)e^{-(A-\delta-n)t}$. Si sustituimos esta ecuación temporal en la condición de transversalidad (5.7), concluiremos que

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-(A-\delta-n)t}\right)k_t = 0. \tag{5.12}$$

2. La acotación de la utilidad

Una tasa de crecimiento positiva en el estado estacionario comporta que el término de la función de utilidad $c^{1-\sigma}$ crezca sin ningún límite. Puesto que la función de utilidad, $U(0)$, es la suma descontada de un número infinito de tales términos, $U(0)$ valdrá infinito, a menos que se restrinja el conjunto de los parámetros factibles. Si la utilidad fuera infinita, los individuos no tendrían ningún motivo para maximizar la utilidad, ¡ya que siempre serían, en todo caso, infinitamente felices! Para lograr que la utilidad esté acotada, es preciso, pues, que el término que está dentro de la integral se aproxime a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Dado que el consumo siempre crece a la tasa constante $\gamma_c^* = \gamma^*$, cuyo valor proporciona (5.8), podemos escribir c_t como $c_t = c(0)e^{\gamma_t^*}$. En consecuencia, el término relativo al consumo de la función de utilidad puede ser escrito como $e^{-(\rho-n-\gamma^*[1-\sigma])t}$. Así pues, para que esta expresión se aproxime a cero cuando t tiende a infinito, debe cumplirse que $\rho > n + \gamma^*(1-\sigma)$. Si empleamos el valor de γ^* que nos proporciona (5.8), llegamos a la conclusión de que la condición que debe cumplirse para que la utilidad esté acotada es

$$\rho > n + (A - \delta - \rho)(1-\sigma)/\sigma. \tag{5.13}$$

Dicho de otro modo, la tasa de descuento tiene que ser lo suficientemente grande para que la utilidad esté acotada.

3. La dinámica de la transición

Anteriormente se ha demostrado que, en el estado estacionario, el consumo, el capital y la producción per cápita, deben crecer todos a la misma tasa. La ecuación (5.8), que se cumple para todo t, indica que el consumo crecerá siempre a una tasa constante dada por $(A-\rho-\delta)/\sigma$, por lo que el consumo siempre se encuentra en el estado estacionario. En esta sección demostraremos que el capital y la producción también crecen a la misma tasa en todo momento, por lo que el modelo no presenta ningún tipo de transición hacia el estado estacionario.

Si tomamos la restricción presupuestaria (5.3) y la integramos entre $t = 0$ y $t = T$ (premultiplicando previamente ambos lados por el factor integrante $e^{-(A-\delta-n)t}$, y teniendo en cuenta asimismo que $c_t = c(0)e^{[(A-\rho-\delta)/\sigma]t}$), se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_0^T (\dot{k}_t - (A-\delta-n)k_t)e^{-(A-\delta-n)t}dt = -c_0 \int_0^T e^{[\gamma_c-(A-\delta-n)]t}dt. \tag{5.14}$$

La solución a (5.14) es

$$k_T = \text{constante } e^{(A-\delta-n)T} + (c_0/\phi)\, e^{(A-\rho-\delta)T/\sigma}, \tag{5.15}$$

siendo $\phi = (A-\delta)(\sigma-1)/\sigma + \rho/\sigma - n$. Si, tras sustituir el valor de k_T que acabamos de obtener en la condición de transversalidad (5.12), tomamos el límite cuando T tiende a infinito, llegamos al resultado final que estábamos buscando:

$$\lim_{t\to\infty} [\text{constante } + (c_0/\phi)e^{-\phi T}] = 0. \tag{5.16}$$

Dado que $\phi > 0$, el segundo término del corchete tiende a cero. De este modo, el cumplimiento de la condición de transversalidad exige que el término constante de (5.15) valga cero, de tal forma que $k_t = ((c_0/\phi))\, e^{(A-\rho-\delta)\tau/\sigma} = (1/\phi)c_t$. Esto implica que el valor del capital debe ser proporcional al del consumo, razón por la cual ambos deben crecer a la misma tasa en todos los puntos del tiempo. Puesto que la producción es proporcional al capital, su tasa de crecimiento también es constante en todo momento. En consecuencia, una economía en la que exista una tecnología AK no presentará transición dinámica, y todas las variables crecerán permanentemente a una tasa constante.

4. La hipótesis de convergencia

A diferencia del modelo neoclásico, este modelo no predice la convergencia de las economías (ni absoluta ni condicional). Para ver este punto consideremos un conjunto de países con los mismos valores de los parámetros A, σ, ρ, δ y n. Imaginemos, además, que la única diferencia entre ellos sea el valor inicial del capital k_0. El modelo AK predice que la tasa de crecimiento de todos los países será constante e igual a (5.8). En consecuencia, la tasa de crecimiento no estará relacionada con la renta (ni negativamente ni de ninguna otra forma).

Supóngase, por otra parte, que los países se diferencian únicamente por sus parámetros de productividad ($A_i \neq A_j$ para $i \neq j$). Puesto que $\gamma^* = (1/\sigma)(A - \rho - \sigma)$, los países con un crecimiento bajo continuarán con este tipo de crecimiento para siempre, y esto independientemente del valor de su renta o de su producción inicial. Es decir, una vez más el modelo prescribe que no existe ninguna relación entre el crecimiento y la renta inicial. Una forma alternativa de llegar a este resultado consiste en recurrir a la linealización del modelo neoclásico en las proximidades del estado estacionario que se desarrolló en el capítulo 3, y hacer que la participación del capital β sea igual a la unidad (con lo que la tecnología se convierte en AK). Obsérvese que, en este caso, el parámetro μ de (3.29) es igual a cero, de modo que el valor propio "negativo" es igual a $\lambda_1 = \rho - n - (\rho - n) = 0$. Como resultado, la ecuación de convergencia (3.29) indica que el valor del coeficiente de regresión de la renta inicial en este modelo debe ser cero.

Tal como se mencionó en el capítulo 2, las implicaciones de los diferentes modelos en relación con la existencia de convergencia económica entre países han sido utilizadas por una heterogeneidad de autores para contrastar la validez del modelo neoclásico respecto a los modelos de crecimiento endógeno. El resultado fundamental que surge de estos estudios empíricos (que se encuentran resumidos en el capítulo 10 de este libro) es que la hipótesis de convergencia parece cumplirse con regularidad, al menos en un sentido condicional, para una amplia variedad de fuentes estadísticas.

5. Introducción de mercados

Es posible demostrar que los resultados que acabamos de derivar coinciden con los resultados que se obtendrían en un contexto en el que existen mercados competitivos en los que las familias, por un lado, adquieren el producto y, por otro, venden los factores de producción a las empresas. Puesto que el análisis es muy parecido al que se desarrolló en el capítulo 3, no vamos a reproducir de nuevo todos los pasos. Como es habitual, las familias maximizan (5.2) sujeto a la ecuación dinámica

$$\dot{b} = rb - c - nb \tag{5.17}$$

en la cual b es el número de activos por persona y r es la tasa de rendimiento de los activos. Como en el modelo AK no se recoge explícitamente el factor trabajo, en (5.17) se han omitido las rentas salariales. Esta ecuación expresa el hecho de que la renta total per cápita, rb, debe ser asignada entre el gasto en bienes de consumo y la adquisición de nuevos activos, $\dot{b}$. El término nb aparece en (5.17), tal como ya aparecía en los capítulos 1 y 2, para recoger el hecho de que un aumento en n, si todas las otras cosas permanecen igual, reduce el número de activos de la economía por persona.

Las condiciones de primer orden de este problema de maximización comportan que la ecuación de Euler tenga la forma

$$\dot{c}/c = (1/\sigma)(r - \rho), \tag{5.18}$$

y la condición de transversalidad, por su parte, viene dada por $\lim_{t\to\infty} \nu_t b_t = 0$.

Las empresas alquilan el único factor de producción, el capital, y utilizan la tecnología AK para obtener un producto, con el objetivo de maximizar sus beneficios. Las condiciones de primer orden del problema de las empresas exigen que las tasas de rendimiento sean iguales a los productos marginales:

$$r = A - \delta. \tag{5.19}$$

Dado que nos enfrentamos a una economía cerrada sin gobierno, el único activo del que existe una oferta neta positiva es el capital, por lo cual, necesariamente $b = k$. Si sustituimos este resultado en (5.17), y teniendo en cuenta que $\dot{k} = \dot{b}$, llegamos a la restricción presupuestaria agregada incluida en (5.8). Por último, si se introduce la condición de equilibrio $k = b$ en la condición de transversalidad, se obtiene (5.12). Las ecuaciones dinámicas de la economía en que existen mercados competitivos, (5.8) y (5.3), y la condición terminal (5.12), coinciden, por tanto, con las que regían en una economía de familias productoras. En consecuencia, los dos planteamientos son idénticos.

Del mismo modo como vimos en el capítulo 3 para el modelo neoclásico, un planificador maximizaría la misma función de utilidad sujeto a la restricción de recursos a la que se enfrenta el conjunto de la economía. Puesto que (5.3) es una restricción de recursos de esta índole, el problema del planificador coincide con el problema de las familias productoras. El corolario es que las ecuaciones dinámicas que caracterizan la solución también deben ser las mismas.

6. La tecnología AK a través de la introducción del capital humano

Se mencionó en el capítulo 2 que el modelo AK puede ser interpretado como un modelo en el que coexisten el capital físico y el humano. En esta sección haremos explícita esta relación a través de una función de producción Cobb-Douglas en la que los dos factores de producción son el capital físico, K, y el humano, H,

$$Y = BK^{\beta}H^{1-\beta}, \tag{5.20}$$

siendo $0 < \beta < 1$ y B un parámetro constante que refleja el nivel alcanzado por la tecnología. Supondremos que los dos factores, K y H, pueden ser acumulados detrayendo recursos para el consumo, mediante la siguiente relación:

$$\dot{K} + \dot{H} = BK^{\beta}H^{1-\beta} - C - \delta_K K - \delta_H H, \tag{5.21}$$

siendo δ_K y δ_H las tasas de depreciación del capital físico y el humano, respectivamente. La ecuación (5.21) implica que los dos tipos de capital, en su vertiente de activos reales, son sustitutos perfectos, de modo que sus poseedores exigirán que la tasa de rendimiento de ambos coincida. Puesto que la tasa de rendimiento de cada activo viene dada por su productividad marginal neta, será preciso que $\partial Y/\partial K - \delta_K = \beta Y/K - \delta_K = \partial Y/\partial H - \delta_H = (1-\beta)Y/H - \delta_H$. Si introducimos el supuesto adicional de que las dos tasas de depreciación son idénticas, podemos deducir que

$$\beta Y/K = (1-\beta)Y/H, \tag{5.22}$$

lo que nos proporciona una relación unívoca entre K y H:

$$H = K(1-\beta)/\beta. \tag{5.23}$$

Sustituyendo (5.23) en la función de producción (5.20), obtenemos la expresión que queríamos encontrar, $Y = AK$, siendo A una constante irrelevante que toma el valor $A \equiv B[(1-\beta)/\beta]^{1-\beta}$. Éste es el motivo por el que podemos considerar al modelo AK como un modelo en el que coexisten capital físico y humano, a condición de que las tasas de rendimiento de los dos tipos de capital sean iguales en todo momento.

6. GASTO PÚBLICO Y CRECIMIENTO

1. El modelo de las familias productoras

Barro (1990) proporciona una forma alternativa de interpretar la tecnología AK, basada en la introducción de factores de producción de provisión pública en la función de producción. En este contexto, la producción depende de las cantidades existentes de dos factores de producción: capital privado, K, y un factor de producción provisto por el sector público, g. De este modo, la función de producción presenta rendimientos constantes de escala, pero existen rendimientos decrecientes de cada uno de los factores.

En su artículo original, Barro suponía que g era un bien privado cuya provisión corría a cargo del Estado. Sin embargo, no existe ninguna razón para que no pueda tratarse de un bien público puro de consumo no rival como los descritos en Samuelson (1954). Mejor aún, podría tratarse de un bien público parcialmente rival sujeto a fenómenos de congestión como es el caso de las autopistas, los aeropuertos o los tribunales de justicia. De hecho, se puede argumentar que casi todos los bienes públicos entran dentro de esta última categoría. Incluso el arquetipo de bien público, la defensa nacional, es un bien sujeto a congestión (véase Thompson (1976)): cuando un ciudadano aumenta su nivel de renta también aumenta la renta del país en el que vive. De alguna manera, esto incrementa el premio que las fuerzas extranjeras ganarían si invadieran el país y, en consecuencia, reduce la protección de la que los demás ciudadanos disfrutan. Es decir, de alguna manera congestiona la defensa del país.[1] A pesar de todo, en

[1] Un bien público que no estaría sujeto a congestión sería la institución de la realeza. Por ejemplo, todos los ciudadanos del país pueden "disfrutar" de los reyes (y las princesas) sin reducir el disfrute de los demás ciudadanos. La contrapartida es que no está muy claro que los reyes (o las princesas) sean productivos por lo que su identificación con nuestra variable g no es todo lo directa que sería deseable.

este capítulo partiremos del enfoque de Barro (1990) y consideraremos que g es un bien privado provisto por el sector público (véase Barro y Sala-i-Martin (1992c) para el análisis de algunas de estas extensiones).

Si se utiliza una función de producción del tipo Cobb-Douglas, la producción agregada vendrá dada por

$$y = f(k,g) = Ak^{\beta}g^{1-\beta}, \tag{6.1}$$

siendo $0 < \beta < 1$. Supondremos que cada individuo representa una parte muy reducida del tamaño de la economía, de forma que toma el gasto público como dado. Imaginemos también que el Estado tiene que equilibrar su presupuesto en todos los momentos del tiempo (no se permite la existencia de déficit público, en ningún caso),[2] y que la única fuente de ingresos públicos es un impuesto sobre la renta con un tipo de gravamen constante e igual a τ. Como de costumbre, los individuos maximizan la función de utilidad (5.2) sujeto a la restricción

$$\dot{k} = (1-\tau)\cdot Ak^{\beta}g^{1-\beta} - c - (\delta+n)k, \tag{6.2}$$

en la cual g y $k_0 > 0$ deben considerarse como dados. Destaquemos que esta restricción es muy similar a la incluida en (5.3). La única diferencia reside en que la función de producción viene dada por (6.1) y que los individuos toman en consideración su renta *después de impuestos* en lugar de su renta bruta. El Estado recauda $\tau Ak^{\beta}g^{1-\beta}$ unidades de renta y las transforma en un volumen de bienes públicos g. De este modo, la restricción presupuestaria del sector público puede expresarse como

$$g = \tau y = \tau Ak^{\beta}g^{1-\beta}. \tag{6.3}$$

Puesto que los agentes individuales toman el gasto público como dado (es decir, cuando resuelven su problema de optimización no son conscientes del efecto que tienen sus decisiones de inversión, a través de la ecuación [6.3], sobre la cantidad que gasta el sector público), debemos concluir que se enfrentan a un problema cóncavo. En consecuencia, se

[2] Aunque en la vida real los gobiernos pueden tener déficit o superávit fiscales, a largo plazo el presupuesto público debe estar más o menos equilibrado. Como lo que nos interesa a nosotros es el largo plazo, el supuesto de equilibrio fiscal en todo momento parece razonable.

pueden aplicar las técnicas habituales de optimización. El Hamiltoniano será

$$H(\,) = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \nu\left((1-\tau)Ak^{\beta}g^{1-\beta} - c - (n+\delta)k\right), \tag{6.4}$$

y las condiciones de primer orden que obtenemos son:

$$e^{-(\rho-n)t}c^{-\sigma} = \nu \tag{6.5}$$

$$\dot{\nu} = -\nu\left((1-\tau)A\beta(g/k)^{1-\beta} - (\delta+n)\right) \tag{6.6}$$

$$\lim_{k\to\infty} \nu_t k_t = 0. \tag{6.7}$$

Si se toman logaritmos, se derivan los dos miembros de (6.5) respecto del tiempo y se sustituye el resultado en (6.6), llegamos a la condición que hemos ido encontrando continuamente, según la cual el crecimiento del consumo debe ser proporcional a la diferencia que existe entre la tasa de rendimiento (o la productividad marginal neta del capital después de impuestos) y el término ρ

$$\dot{c}/c \equiv \gamma_c = \sigma^{-1}\left((1-\tau)A\beta(g/k)^{(1-\beta)} - \rho - \delta\right). \tag{6.8}$$

A continuación podemos operar en la restricción presupuestaria del Estado, (6.3), para expresar el tipo impositivo, τ, como una función de g/k: $\tau = g/y = g/(Ak^{\beta}g^{1-\beta}) = (g/k)^{\beta}A^{-1}$. Despejando g/k, obtenemos que:

$$g/k = (\tau A)^{1/\beta}. \tag{6.9}$$

Y, por fin, sustituyendo (6.9) en (6.8), obtendremos la tasa de crecimiento como función de los parámetros τ, ρ, δ, σ, A y β:

$$\gamma_c = \sigma^{-1}\left(\beta A^{1/\beta}(1-\tau)\tau^{(1-\beta)/\beta} - \rho - \delta\right). \tag{6.10}$$

Como ya viene siendo habitual, si se divide la restricción dinámica por k, se toman logaritmos y se derivan ambos miembros respecto del tiempo, concluiremos que la tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento del capital $\gamma_c^* = \gamma_k^* \equiv \gamma^*$. Dado que τ es constante, la tasa de crecimiento del consumo siempre va a ser constante. Si ahora procedemos del mismo modo a como hicimos en el capítulo anterior, llegaremos a la conclusión de que el consumo es siempre proporcional al capital, por lo que el capital crece permanentemente a una tasa constante. Debido a la restricción presupuestaria del sector público, al ser τ una constante y crecer k a una tasa constante, g debe crecer igualmente a una tasa constante. Por fin, y puesto que todos los factores crecen a la tasa dada por γ^*, la producción también debe crecer en todo momento a esa tasa. En consecuencia, y tal como sucedía en el modelo AK, el modelo de Barro (1990) no presenta ninguna forma de transición dinámica.

La razón intuitiva por la que en este modelo se produce un crecimiento endógeno es la siguiente: cuando los individuos deciden ahorrar una unidad de consumo y con ella comprar una unidad de capital, aumentan el ingreso nacional en la cantidad equivalente a la productividad marginal del capital. El impuesto sobre la renta hace que este aumento del ingreso se transforme en un aumento del erario público y éste, a su vez, permite un incremento del gasto, g. De este modo un aumento de k conlleva un aumento proporcional de g, por lo que k y g crecen al mismo ritmo. Es como si el input público fuera otro factor de producción susceptible de ser acumulado. Dado que estamos suponiendo la existencia de rendimientos constantes de k y g conjuntamente, la producción presenta rendimientos constantes de escala de los factores que pueden ser acumulados. En definitiva, la función de producción ha devenido una AK.

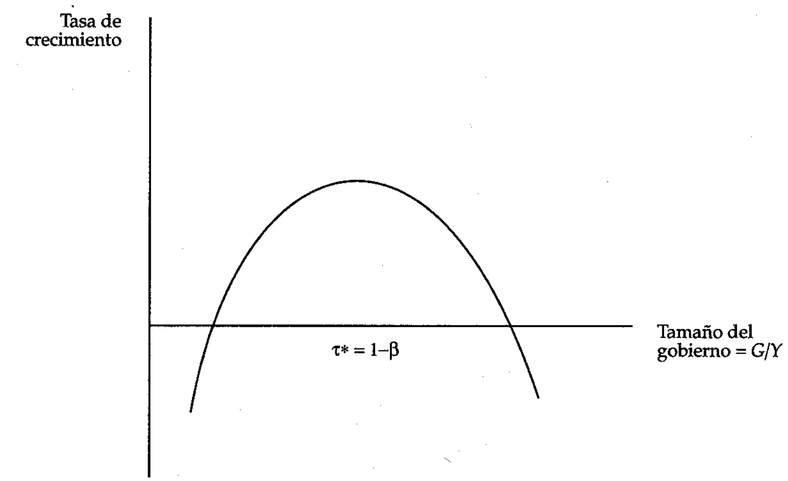
2. La relación entre el tamaño del Estado y la tasa de crecimiento

La ecuación (6.10) relaciona la tasa de crecimiento de la economía con el tipo impositivo, τ. De la restricción presupuestaria del Estado se desprende que el tipo impositivo debe ser igual al peso del sector público en la economía, $\tau = g/y$. Pero, dando un paso más, nos podemos plantear cuál es la relación existente entre el tamaño del Estado y la tasa de crecimiento. Si τ es cero, la productividad marginal del capital después de impuestos también vale cero, por lo que la tasa de crecimiento de (6.10) es negativa: $\gamma^* = (1/\sigma)(-\rho-\delta)$. Esto se debe a que cuando τ es cero, el Estado no puede proveer bienes públicos. Cuando no existen bienes públicos, el rendimiento de la inversión privada es cero (como puede observarse efectuando la derivada de la producción con respecto al capital k y tomando $g = 0$). En el otro extremo, cuando τ vale 1, el Estado provee una cantidad enorme de bienes públicos, que hacen que el capital privado sea muy productivo.[3] El problema estriba en que el rendimiento neto después de impuestos vuelve a ser, de nuevo, negativo, puesto que el Estado hace suya la totalidad de la producción a través del tipo impositivo del 100 por ciento. Una vez más, por lo tanto, la tasa de crecimiento es negativa. Para valores intermedios de τ, la relación entre τ y γ tendrá, pues, forma de U invertida, tal como se puede observar en el gráfico 6.1. El máximo de esta función se encuentra en[4]

$$\tau^* = (1 - \beta). \tag{6.11}$$

Gráfico 6.1

La relación entre el tamaño del gobierno y la tasa de crecimiento



[3]Este efecto es universal: las acciones del gobierno siempre se tienen que financiar y ello conlleva distorsiones que reducen los incentivos a la inversión y el crecimiento.

[4]Para hallar el valor de (6.11), basta con igualar a cero la derivada de la tasa de crecimiento con respecto a τ.

La ecuación (6.11) indica que el Estado puede maximizar el crecimiento de la economía[5] adoptando un tamaño igual al que resultaría del mercado en un equilibrio competitivo con factores de producción privados. Dicho de otro modo, la participación del producto provisto por el Estado debe ser igual a la participación que viene determinada por la tecnología, $1-\beta$ (obsérvese que $1-\beta$ es el exponente del factor de producción público en la función de producción). La tasa de crecimiento que resultaría en este caso sería $\gamma^* = \sigma^{-1}(\beta A^{1/\beta}\beta(1-\beta)^{(1-\beta)/\beta} - \rho - \delta)$.

3. La economía de planificador central y el crecimiento óptimo

Es fácil demostrar que la solución de un modelo en el que existan mercados competitivos será la misma que se obtiene en el modelo de las familias productoras que hemos considerado hasta el momento. Puesto que la demostración sigue exactamente los mismos pasos que la que se ofreció en el capítulo 5, no la reproduciremos aquí.

Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurría en el modelo AK, la solución que adopta el planificador será, en este caso, diferente. La razón intuitiva que explica esta diferencia es que el comportamiento del planificador irá más allá del de los agentes y tomará en consideración los efectos de la inversión privada sobre los ingresos públicos que, a su vez, afectan al resto de los agentes individuales. Dicho de otro modo, cuando un individuo decide invertir, se preocupa únicamente de la tasa de rendimiento privado de su inversión. Sin embargo, cuando invierte una unidad adicional de capital está aumentando los ingresos fiscales del sector público. El Estado utiliza estos ingresos adicionales para proveer un mayor número de unidades de g, lo que hace aumentar la productividad marginal de todos los productores (obsérvese la similaridad entre este efecto y el que produce una externalidad). La tasa de rendimiento real o social es superior a la tasa de rendimiento privada. Pero, dado que cada uno de los productores representa una parte muy reducida de la economía, ninguno de ellos tomará en consideración el rendimiento social, por lo que la inversión privada será inferior a la que sería deseable desde un punto de vista social.

[5]En este contexto, en el que existe una función de producción Cobb-Douglas y las funciones de utilidad poseen una elasticidad de sustitución constante, la maximización de la tasa de crecimiento es equivalente a la maximización del valor presente de la utilidad $U(0)$.

De hecho, se está produciendo una "externalidad de inversión" que opera a través de la restricción presupuestaria del sector público.

Algebraicamente, a diferencia de los agentes privados, el planificador maximiza la utilidad sujeto a la restricción del sector privado (6.2) y sujeto a la restricción del presupuesto del sector público, (6.3).[6] Para encontrar la solución a este problema de maximización, sustituimos (6.3) en (6.2), y así obtenemos que

$$\dot{k} = (1-\tau)A^{1/\beta}\kappa\tau^{(1-\beta)/\beta} - c - (\delta+n)k. \tag{6.12}$$

De modo que el planificador maximiza (5.2) sujeto a la nueva restricción (6.12). El Hamiltoniano de este problema es:

$$H(\,) = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \nu\left((1-\tau)kA^{1/\beta}\tau^{(1-\beta)/\beta} - c - (\delta+n)k\right). \tag{6.13}$$

Y sus condiciones de primer orden son:

$$e^{-(\rho-n)t}c_t^{-\sigma} = \nu \tag{6.14}$$
$$\dot{\nu} = -\nu\left((1-\tau)A^{1/\beta}\tau^{(1-\beta)/\beta} - n - \delta\right) \tag{6.15}$$
$$\lim_{t\to\infty} \nu_t k_t = 0. \tag{6.16}$$

Si procedemos a efectuar las sustituciones habituales, acabaremos por obtener que la tasa de crecimiento de una economía regida por un planificador viene dada por

[6]Estrictamente hablando, el planificador no debería restringirse asimismo a utilizar un impuesto sobre la renta. Si se le dejara escoger libremente el tipo de impuesto así como también el nivel de g, entonces maximizaría (5.2) sujeto a

$$\dot{k} = Ak^{\beta}g^{1-\beta} - c - (\delta+n)k - g.$$

El lector puede comprobar que la solución a este problema es idéntica a la del texto cuando el tamaño del impuesto se pone al nivel óptimo, $1-\beta$.

$$\gamma_{\text{plan}} = \sigma^{-1}\left(A^{1/\beta}(1-\tau)\tau^{(1-\beta)/\beta} - \rho - \delta\right). \tag{6.17}$$

La diferencia entre esta tasa de crecimiento y la que se obtiene en el equilibrio competitivo (6.10) estriba en que en (6.10) aparecía el parámetro β multiplicando la tasa de rendimiento. Dado que $\beta < 1$, es evidente que la solución competitiva proporciona una tasa de crecimiento de la economía inferior, para todo τ. La razón intuitiva por la que sucede esto ya fue indicada anteriormente: los agentes privados no toman en consideración el efecto que tienen sus decisiones de inversión en el presupuesto del sector público e, indirectamente, a través de éste, sobre la productividad de todos los demás productores. Puesto que la tasa de rendimiento que ellos perciben es inferior a la tasa social, tenderán a invertir insuficientemente y, por este motivo, la economía crecerá a una tasa inferior a la óptima. Por último, hay que destacar el hecho de que la tasa de crecimiento se maximiza para $\tau^* = (1-\beta)$, el mismo resultado que se obtuvo en el equilibrio competitivo. Si se sustituye este valor óptimo de τ en (6.10) y (6.17), concluiremos que la tasa de crecimiento que se alcanza en una economía regida por un planificador será superior a la tasa de crecimiento que se alcanza si el Estado fija la tasa impositiva a su valor óptimo $\tau^* = (1-\beta)$, y deja que los mercados funcionen de forma competitiva.

7. EL APRENDIZAJE POR LA PRÁCTICA Y EL DESBORDAMIENTO DEL CONOCIMIENTO

1. El modelo de las familias productoras

En el seminal artículo que dio inicio a la literatura de crecimiento endógeno, Romer (1986) eliminó la tendencia de los rendimientos decrecientes del capital mediante el supuesto de que el conocimiento era obtenido como un subproducto de la inversión en capital físico.

Este fenómeno, conocido como aprendizaje por la práctica ("learning by doing") fue tomado de Arrow (1962) y Sheshinski (1967).

Arrow había argumentado en su día que la adquisición de conocimientos (el aprendizaje) estaba vinculada a la experiencia y citaba ejemplos de la industria aeronáutica para la cual existen pruebas concluyentes de la existencia de una estrecha interacción entre la experiencia acumulada y los aumentos de productividad. También defendía que una buena medida del aumento de la experiencia era la inversión, debido a que "cada máquina nueva que es producida y puesta en funcionamiento es capaz de modificar el entorno en el que tiene lugar la producción, por lo que el aprendizaje recibe continuamente nuevos estímulos" (p. 157). Esto implica que un índice de experiencia es la inversión acumulada o, lo que es lo mismo, el stock de capital. Formalmente, sea la función de producción de la empresa i una función del capital y del trabajo. Supongamos que contamos con una tecnología potenciadora del trabajo, a través del factor $A(t)$:

$$Y_{it} = F(K_{it}, A(t)L_{it}). \tag{7.1}$$

La función $F(\,)$ satisface las propiedades neoclásicas descritas en el capítulo 3. A diferencia de lo que expusimos allí, sin embargo, no suponemos que $A(t)$ crece a una tasa exógena x sino que, siguiendo la inspiración de Arrow, imaginaremos que crece de forma paralela a la inversión. Trataremos el "bien" conocimiento como un bien público ya que, una vez que una empresa ha aumentado sus conocimientos, todas las empresas tienen acceso a éstos. Este fenómeno es conocido como el desbordamiento del conocimiento ("knowledge spillovers"). Por todo lo dicho, el stock de conocimientos de la economía crecerá de forma paralela a la cantidad total de inversión, de modo que $\dot{A} = \dot{\kappa}$, siendo κ el valor alcanzado por el capital agregado. Si integramos la inversión y el incremento experimentado por el conocimiento desde el principio de los tiempos y el presente, podemos concluir que

$$A_t = \int_{-\infty}^{t} I(v)dv = \kappa_t. \tag{7.2}$$

Esto significa que, en el momento t, el estado del conocimiento es proporcional al stock de capital. Si se parte de una función de producción Cobb-Douglas, la producción de la empresa i se puede escribir de la siguiente forma:

$$Y_i = F(K_i, L_i\kappa) = K_i^{\beta}(\kappa L_i)^{(1-\beta)}. \tag{7.3}$$

Esta función de producción presenta rendimientos constantes de escala cuando κ permanece constante. Sin embargo, si cada productor aumenta K_i, κ aumenta en la misma medida: al aumentar K_i y κ en una determinada cuantía, la producción crece en la misma proporción. En otras palabras, existen rendimientos constantes de capital a nivel agregado, lo cual, como ya hemos indicado en varias ocasiones, es lo que permite generar crecimiento endógeno. Es decir, el aprendizaje por la práctica junto con el efecto desbordamiento ha permitido transformar un modelo que en principio parecía neoclásico en un modelo AK de crecimiento endógeno.

Supongamos ahora que el número de empresas de la economía sea un número muy elevado M, constante. Puesto que M es grande, cada empresa toma el stock agregado de capital como dado, a pesar de que $\kappa = \sum_{i=1}^{M} k_i = Mk$. Si sumamos la producción de todas las empresas, la función de producción agregada adopta la siguiente forma:

$$Y = K^{\beta}L^{1-\beta}\kappa^{1-\beta} \tag{7.4}$$

en la que $K = MK_i$ y $L = ML_i$. Debido a la conveniencia de trabajar en términos per cápita, dividimos los dos miembros de (7.4) por L, y llegamos a la expresión

$$y = k^{\beta}\kappa^{1-\beta} \tag{7.5}$$

donde $k = K/L$ e $y = Y/L$. Si imaginamos que no existe crecimiento de la población, las familias maximizan una función de utilidad que tiene la misma forma que (5.2) (en la que $n = 0$), sujeta a

$$\dot{k} = k^{\beta}\kappa^{1-\beta} - c - \delta k, \tag{7.6}$$

y tomando el capital inicial $k_0 > 0$ y κ como dados. Para resolver este problema plantearemos un Hamiltoniano que, a estas alturas, nos resulta ya familiar:

$$H(\,) = e^{-\rho t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\right) + \nu\left(k^{\beta}\kappa^{1-\beta} - c - \delta k\right). \tag{7.7}$$

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$e^{-\rho t}c_t^{-\sigma} = \nu \tag{7.8}$$

$$\dot{\nu} = -\nu\left(\beta k^{-(1-\beta)}\kappa^{1-\beta} - \delta\right) \tag{7.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \nu_t k_t = 0 \tag{7.10}$$

El equilibrio en el mercado de capital requiere que el capital total de la economía sea igual a la suma de los stocks de capital individuales. Dado que k es el capital per cápita, el capital total será igual al producto de k por la cantidad de individuos L, de modo que $\kappa = Lk$. A partir de esta condición, y tomando logaritmos y derivadas en (7.8), y sustituyendo, por último, el resultado en la ecuación (7.9), se obtiene la tasa de crecimiento del consumo

$$\dot{c}/c \equiv \gamma_c = \sigma^{-1}\left(\beta L^{1-\beta} - \rho - \delta\right), \tag{7.11}$$

que es proporcional a la diferencia entre la productividad marginal neta del capital y la tasa de descuento individual. Podemos dividir por k los dos miembros de la restricción dinámica (7.6), y a continuación tomar logaritmos y derivadas, para demostrar así que el stock de capital crecerá en el estado estacionario a la misma tasa que el consumo. Puesto que la producción agregada es proporcional al valor del capital agregado, las tasas de crecimiento de k e y son iguales, por lo que la producción crecerá también a esa misma tasa.

Empleando el mismo procedimiento que se utilizó en el modelo AK es fácil demostrar que estas tasas de crecimiento son constantes e iguales a (7.11) en todo momento. Esto quiere decir que el modelo no presenta transición dinámica de ningún tipo, es decir, $\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \gamma^*$, para todo t.

2. Efectos de escala

Una característica relevante de (7.11) es que la tasa de crecimiento depende de la población de la economía. Este hecho se conoce como un efecto de escala e implica que los países con una población mayor crecerán más deprisa. Es decir, el modelo predice que la India (o España) crecerá más que Suiza, simplemente porque su población es mayor. Esta predicción no parece ser validada por los datos, puesto que para el periodo posterior a la Segunda Guerra Mundial los datos de un número bastante elevado de países indican que las tasas de crecimiento per cápita no están correlacionadas ni positiva ni negativamente con el tamaño de la población del país (véanse Bakus, Kehoe y Kehoe (1992) y Kremer (1993), que efectúan un estudio sobre la existencia de estos efectos de escala). Una posible explicación tras el fracaso empírico de la hipótesis de los efectos de escala es que la unidad relevante no es un país. La razón es que las fronteras de los países se han definido históricamente a través de luchas políticas o militares o a través de enlaces matrimoniales entre personajes de sangre azul. De acuerdo con el modelo, la unidad de escala relevante sería el área en la cual un determinado tipo de conocimiento se desborda. Es decir, cuando el conocimiento de algún tipo se expande en una región de la China, éste no tiene por qué expandirse por toda la geografía china y solamente por la geografía china. Podría expandirse solamente a algunas regiones colindantes al lugar de origen de la idea. De la misma manera, el conocimiento

desarrollado en Mónaco no sólo se expande a través de Mónaco sino que puede llegar a Francia, Italia o a toda la comunidad europea. En otras palabras, la unidad política tiene poco que ver con la unidad económica relevante y esto podría explicar por qué, en los datos, hay poca relación entre la población de las determinadas unidades políticas (los países) y las tasas de crecimiento.

Otra consecuencia importante del efecto de escala consiste en que, si la población L crece a lo largo del tiempo, también lo hará la tasa de crecimiento del producto per cápita. En otras palabras, no habrá un estado estacionario, dado que la tasa de crecimiento de la economía no será constante sino creciente. Ésta es, posiblemente, la razón por la que el supuesto de ausencia de crecimiento de la población se introduce a menudo en este tipo de modelos. No hace falta decir que la tasa de crecimiento de las economías del siglo XX no ha ido aumentando a lo largo del tiempo a pesar de que la población ha sido cada vez mayor.

Técnicamente, la razón que está detrás de los efectos de escala es el supuesto de que la externalidad depende del volumen agregado de capital. Una forma de desprenderse de estos efectos de escala es suponer que el volumen de conocimientos depende, en alguna medida, del stock medio de capital κ/L. Obsérvese que si se sustituye κ/L por A en (7.1) llegaremos a la conclusión de que la productividad marginal del capital, y por tanto la tasa de crecimiento, son independientes de L.

3. La solución del planificador y sus implicaciones de política económica

A diferencia de las familias, un planificador central confrontado con una función de producción de la forma (7.1) tendrá en cuenta el hecho de que, cuando una empresa invierte, aumenta la cantidad de conocimientos a disposición de todas las demás empresas de la economía. Por este motivo, al calcular las condiciones de primer orden de su problema, efectuará la derivada respecto de la totalidad del capital (incluyendo la parte que no utiliza la empresa). En otras palabras, el planificador maximizará la función de utilidad (5.2) sujeto a (7.6) y a

$$Lk = \kappa. \tag{7.12}$$

Sustituyendo (7.12) en (7.6), finalmente obtendremos el siguiente Hamiltoniano:

$$H() \acute{=} e^{-\rho t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right)+\nu\left(kL^{1-\beta}-c-\delta k\right). \qquad (7.13)$$

Si, a continuación, calculamos las condiciones de primer orden, concluiremos que la tasa de crecimiento de una economía regida por un planificador viene dada por:

$$\gamma_{\text{plan}} = \sigma^{-1}(L^{1-\beta}-\rho-\delta). \qquad (7.14)$$

La única diferencia entre la tasa de crecimiento competitivo (7.11) y (7.14) es que en la primera el parámetro β está multiplicando a $L^{1-\beta}$. Dado que $\beta < 1$, el planificador alcanza una tasa de crecimiento superior a la del mercado. Esto se debe a que el planificador internaliza la externalidad, es decir, toma en consideración el hecho de que cuando una persona invierte una unidad adicional de capital, aumenta el volumen agregado de conocimientos, lo que hace aumentar la productividad del resto de los agentes de la economía. Las familias productoras, por el contrario, no internalizan esta externalidad.

En términos de política económica, la solución a la que llega el planificador social puede ser alcanzada en una economía descentralizada mediante la introducción de una desgravación a la inversión, con un tipo $(1-\beta)$ y financiada con un impuesto de suma fija. Una forma alternativa de situarse en el punto óptimo consiste en la imposición de un subsidio a la producción, con un tipo $(1-\beta)/\beta$. En este caso, también, el subsidio debería ser financiado con un impuesto de suma fija.

Una extensión interesante del modelo de Romer para una economía abierta lo proporcionó Young (1991). En su planteamiento, el mundo se divide en dos países, uno desarrollado (el norte) y otro en vías de desarrollo (el sur). También existen dos bienes, uno de alta tecnología y otro de baja tecnología. Cuando se abre el comercio entre los dos países, el norte se especializa (siguiendo el modelo ricardiano de la ventaja comparativa) en los productos de alta tecnología y el sur en los de tecnología inferior. Dado que se supone que los productos de alta tecnología conducen a un mayor aprendizaje por la práctica, el efecto del libre comercio reside en el aumento del crecimiento del norte y, potencialmente, en una disminución del crecimiento del sur.

4. La relevancia empírica de los fenómenos de aprendizaje por la práctica y el desbordamiento del conocimiento

Hemos dejado para el final de este capítulo la cuestión de la importancia empírica de los fenómenos de aprendizaje por la práctica y de desbordamiento del conocimiento. Arrow (1962) cita evidencia empírica procedente de la industria aeronáutica para demostrar que la productividad en la producción de aviones se incrementa al aumentar el número de unidades producidas por la empresa. Searle (1945) y Rapping (1965) aportan nuevas pruebas utilizando datos de la producción de buques de carga —específicamente de los astilleros Liberty Shipyards— durante la Segunda Guerra Mundial. Desde 1941 hasta 1944, estos astilleros produjeron un total de 2.458 buques, todos con el mismo diseño. Los autores representaron en un gráfico la cantidad de horas necesaria para producir un barco en relación con el número de barcos construidos hasta la fecha. Los resultados fueron asombrosos: la reducción de las horas de trabajo necesarias por buque oscilaba entre el 12 y el 24 por ciento cada vez que se doblaba la producción.

Con respecto a la importancia de los fenómenos de desbordamiento del conocimiento, Caballero y Lyons (1992) han mostrado que, para la industria manufacturera de los Estados Unidos y de Europa, el valor de las externalidades de conocimiento es significativamente positivo, pero su valor quizás no sea lo suficientemente grande como para generar crecimiento endógeno en el modelo de Romer (en la especificación Cobb-Douglas, el exponente del capital agregado debería estar alrededor del 7 por ciento). Caballero y Jaffe (1993) llegaron a conclusiones similares.

8. La acumulación de capital humano y el crecimiento

1. El modelo de las familias productoras

En el capítulo 5 apuntamos la idea de que considerar el trabajo como capital humano (y, en consecuencia, convertir el trabajo en un factor susceptible de ser acumulado) constituía una forma de introducir la tecnología AK. Sin embargo, uno de los supuestos implícitos en nuestro argumento se apoyaba en el hecho de que el capital físico y el humano eran bienes similares, en el sentido de que ambos podían ser acumulados a partir de las unidades de producción detraídas del consumo o, lo que es lo mismo, ambos eran producidos con la misma tecnología.

Sin embargo, se podría argumentar que el capital físico y el humano son bienes con unas propiedades enteramente diferenciadas. En particular, la función de producción de capital físico es distinta de la de capital humano (es decir, del proceso de educación). Así, por ejemplo, en la literatura del mercado laboral se destaca el hecho de que el proceso de educación requiere relativamente más capital humano que la producción de capital físico. En otras palabras, la educación es más intensiva en capital humano. Otra distinción fundamental entre capital físico y humano es que para acumular capital humano el individuo debe emplear *su propio* tiempo, mientras que el capital físico se puede comprar, regalar o heredar sin necesidad de un esfuerzo propio.

Uzawa (1965) y Lucas (1988) explotaron esta idea para construir un modelo de dos sectores con crecimiento endógeno. En uno de los sectores, la producción final se obtiene mediante la combinación de capital físico y humano. Este producto final puede ser consumido o transformado en capital físico. En el otro sector, la producción y acumulación de capital humano se hace ex profeso a partir de capital físico y humano. Se considera, además, que la tecnología para la obtención de capital humano es diferente de la que se emplea para la obtención de la producción final.

Si denotamos por u la fracción del tiempo que los individuos trabajan en el sector de bienes finales, por h la medida de la cualificación media de los trabajadores, y por L el número de personas, el trabajo total efectivo o ajustado por su calidad empleado en el sector de bienes finales es igual a uhL. Uzawa (1965) parte de una función de producción Cobb-Douglas en la que los factores de producción son el capital físico y el humano, de modo que la producción viene dada por:

$$Y = AK^{\beta}(uhL)^{(1-\beta)}. \tag{8.1}$$

Esta función de producción presenta rendimientos constantes de escala respecto del capital físico y el humano, ya que doblar K y uhL conlleva doblar la producción. Lucas (1988) extiende (8.1) para recoger una externalidad del stock medio de capital humano. Esta externalidad es un medio de reflejar el hecho de que la gente es más productiva cuando está rodeada de individuos inteligentes y productivos. Si indicamos por h_a el capital humano medio de la fuerza de trabajo, la función de producción se transforma en:

$$Y = AK^{\beta}[uhL]^{(1-\beta)}h_a^{\psi}, \tag{8.2}$$

en la que h_a^{ψ} recoge el valor de la externalidad del stock medio de capital humano. La existencia de esta externalidad no es esencial para que el modelo genere crecimiento endógeno. Lucas la introduce para obtener otros resultados sobre movimientos de la población que en este momento no nos interesan demasiado. La restricción de acumulación del capital físico es, en este caso:

$$\dot{K} = AK^{\beta}[uhL]^{(1-\beta)}h_a^{\psi} - C - \delta_k K, \tag{8.3}$$

siendo δ_k la tasa de depreciación constante del capital físico. Si escribimos la ecuación anterior en términos per cápita podemos concluir que

$$\dot{k} = Ak^{\beta}[uh]^{(1-\beta)}h_a^{\psi} - c - (\delta_k + n)k. \tag{8.4}$$

La razón por la cual los individuos no desean dedicar todo su tiempo a trabajar en la producción de bienes finales (recuérdese que no hemos considerado la existencia de tiempo de ocio) es que desean dedicar parte de su tiempo a aumentar su capital humano, es decir, a estudiar. Uzawa y Lucas suponen que en la producción de capital humano se emplea el capital humano como único factor de producción y, además, que existen rendimientos constantes de escala. Podemos expresar esta idea formalmente (y en términos per cápita) de la siguiente manera:

$$\dot{h} = \phi h(1-u) - (\delta_h + n)h. \tag{8.5}$$

La ecuación (8.5) indica, pues, que el aumento neto del stock de capital humano per cápita es igual a la producción de capital humano menos la depreciación, que hemos denotado por δ_h. Como es habitual, la tasa efectiva de depreciación de las variables en términos per cápita incluye el término nh, que recoge el hecho de que los aumentos de la población reducen, *ceteris paribus*, la cantidad de capital humano disponible por persona. La producción de capital viene dada, a su vez, por $\phi h(1-u)$. Es decir, la educación se produce con un único factor de producción, el capital humano. La función de producción es lineal en éste. Este supuesto extremo es una versión límite del supuesto que el sector educativo es relativamente más intensivo en capital humano que el sector de bienes finales.[1] La constante ϕ es el parámetro de productividad del sector educativo.

Los individuos eligen la trayectoria temporal del consumo, c_t, y la fracción de su tiempo que dedican a cada uno de los sectores, u_t y $(1-u_t)$, mediante la maximización de la función de utilidad intertemporal (5.2), sujeto a las dos restricciones (8.4) y (8.5). Al hacer esto, los individuos toman como dados el valor de los stocks de capital iniciales k_0 y h_0, y el stock de capital medio de toda la economía h_a.

[1]Se podría considerar, de forma alternativa, que el sector educativo posee una tecnología que utiliza tanto capital físico como humano, por ejemplo $Bk_e^{\alpha}h_e^{1-\alpha}$, donde k_e y h_e son el capital físico y humano utilizados en el sector educativo respectivamente. El supuesto de que este sector es más intensivo en capital humano que el de bienes finales requiere $\alpha < \beta$. Obsérvese entonces que Uzawa y Lucas han introducido el supuesto extremo de que $\alpha = 0 < \beta$.
Hay que decir que el supuesto $\alpha = 0$ es crucial para obtener fórmulas explícitas de las tasas de crecimiento en estado estacionario. Véase Mulligan y Sala-i-Martin (1993) para un tratamiento más general de este tipo de modelos.

2. El comportamiento del estado estacionario

La diferencia fundamental entre este análisis y los que hemos realizado hasta este punto reside en el hecho de que ahora contamos con dos restricciones dinámicas y *dos* variables de control (c y u) en lugar de una. Por este motivo, al construir el Hamiltoniano deberemos incluir dos precios implícitos:

$$H(\,) = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right) + \nu\left(Ak^{\beta}[uh]^{(1-\beta)}h_a^{\psi} - c - (\delta_k+n)k\right) + \lambda\left(h\phi(1-u) - (\delta_h+n)h\right), \quad (8.6)$$

siendo ν y λ, precisamente, los precios implícitos de la inversión en capital físico y en capital humano, respectivamente. Las cinco condiciones de primer orden que surgen de este problema son:

$$e^{-(\rho-n)t}c^{-\sigma} = \nu \quad (8.7)$$

$$\nu\left(Ak^{\beta}h^{(1-\beta)}(1-\beta)u^{-\beta}h_a^{\psi}\right) - \lambda h\phi = 0 \quad (8.8)$$

$$-\dot{\nu} = \nu\left(\beta Ak^{(\beta-1)}(uh)^{(1-\beta)}h_a^{\psi} - (\delta_k+n)\right) \quad (8.9)$$

$$-\dot{\lambda} = \nu\left((1-\beta)Ak^{\beta}u^{(1-\beta)}h^{-\beta}h_a^{\psi}\right) + \lambda\left(\phi(1-u) - (\delta_h+n)\right) \quad (8.10)$$

$$\lim_{k\to\infty}\nu_t k_t = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to\infty}\lambda_t h_t = 0. \quad (8.11)$$

Las dos primeras ecuaciones son las condiciones de primer orden respecto a las dos variables de control, c y u. A continuación, las ecuaciones (8.9) y (8.10) incluyen las condiciones de primer orden con respecto a las variables de estado, k y h, que, como es habitual, requieren que la variación del precio implícito a lo largo del tiempo con signo menos sea igual a la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de estado que corresponda. La ecuación (8.11) recoge las dos condiciones de transversalidad.

Para que haya una consistencia interna, debe cumplirse que h (el capital humano medio) sea igual a h_a (que también es el capital humano medio), es decir:

$$h_a = h. \quad (8.12)$$

Con el propósito de simplificar el álgebra, vamos a suponer que las tasas de depreciación de los dos tipos de capital son idénticas, $\delta_k = \delta_h$. Así, podemos obtener la ecuación dinámica del consumo tomando logaritmos y derivadas de (8.7) y utilizando (8.9) y (8.12), con el siguiente resultado:

$$\dot{c}/c \equiv \gamma_c = \sigma^{-1}\left(\beta Ak^{-(1-\beta)}u^{(1-\beta)}h^{(1+\psi-\beta)} - \rho - \delta\right). \quad (8.13)$$

Si dividimos la restricción dinámica de la acumulación del capital físico por k, obtenemos la ecuación dinámica del capital

$$\dot{k}/k \equiv \gamma_k = Ak^{-(1-\beta)}u^{(1-\beta)}h^{(1+\psi-\beta)} - c/k - (\delta+n). \quad (8.14)$$

Utilizando (8.13), el término de la derecha de esta expresión es igual a $(\gamma_c\sigma+\rho+\delta)/\beta$. Las tasas de crecimiento estacionarias de k y c son, por definición, constantes. Si pasamos todas las constantes al miembro de la derecha y tomamos logaritmos y derivadas respecto del tiempo, llegaremos a la conclusión de que $\gamma_c^* = \gamma_k^*$. Es decir, las tasas de crecimiento del consumo y del capital son idénticas. Si queremos ir más allá y encontrar la relación que existe entre γ_h^*, γ_k^* y γ_c^*, basta con partir de la ecuación (8.13) y llevar todos los términos constantes al miembro de la derecha, obteniéndose de esta forma que

$$(\gamma_c^*\sigma+\rho+\delta)/A\beta = k^{-(1-\beta)}u^{(1-\beta)}h^{(1+\psi-\beta)}. \quad (8.15)$$

Dado que el valor de u está entre cero y uno (recordemos que u es la fracción de tiempo que los individuos dedican a trabajar en lugar de estudiar) su tasa de crecimiento en estado estacionario debe valer cero.

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo (8.15) se llega a

$$0 = -(1-\beta)\gamma_k^* + (1+\psi-\beta)\gamma_h^*, \tag{8.16}$$

que es la ecuación que relaciona la tasa de crecimiento en el estado estacionario del capital físico y el humano. Nótese que si no existiesen externalidades ($\psi = 0$) la tasa de crecimiento del capital humano coincidiría con la del capital físico. En presencia de externalidades, sin embargo, la tasa de crecimiento de h es menor que la de k. Si tomamos de nuevo logaritmos y derivadas, en este caso de la producción, y aplicamos a continuación el resultado obtenido en (8.16), podremos concluir que $\gamma_y^* = \beta\gamma_k^* + (1-\beta+\psi)\gamma_h^* = \gamma_k^*$. En consecuencia, la producción per cápita crece a la misma tasa que el capital físico y que el consumo,

$$\gamma_y^* = \gamma_k^* = \gamma_c^*. \tag{8.17}$$

Para seguir adelante es preciso hallar el valor de γ_k^* (o el de γ_h^*) como función de los parámetros del modelo. Podemos acudir a la ecuación (8.8), que relaciona el cociente de los precios implícitos ν/λ con la productividad marginal de u:

$$\nu/\lambda = \phi/\left(A(1-\beta)k^\beta u^{-\beta}h^{(\psi-\beta)}\right). \tag{8.18}$$

Si, una vez más, tomamos logaritmos y derivadas, obtenemos que:

$$\dot{\nu}/\nu - \dot{\lambda}/\lambda = -\beta\gamma_k^* - (\psi-\beta)\gamma_h^*. \tag{8.19}$$

Para hallar la expresión de $\dot{\nu}/\nu$, basta con reescribir (8.7) como

$$\dot{\nu}/\nu = -(\gamma_c\sigma + \rho - n). \tag{8.20}$$

Y, para obtener la expresión de $\dot{\lambda}/\lambda$, debemos reescribir (8.8) como $\nu\left(Ak^\beta h^{\psi-\beta}(1-\beta)u^{1-\beta}\right) = \lambda\phi u$ y sustituir en (8.10), con el siguiente resultado:

$$-\dot{\lambda}/\lambda = \phi - \delta - n. \tag{8.21}$$

Es decir, el precio implícito del capital humano disminuye a una tasa constante igual a $\phi - n - \delta$ (recordemos que ϕ es el parámetro de productividad de la tecnología de educación). Sustituyendo (8.20) y (8.21) en (8.19), llegamos a la conclusión de que

$$-(\sigma\gamma_c^* + \rho + \delta) + \phi = -\beta\gamma_k^* - (\psi-\beta)\gamma_h^*. \tag{8.22}$$

Llegados a este punto, podemos utilizar la igualdad $\gamma_k^* = \gamma_c^*$ y la ecuación (8.16) para calcular la tasa de equilibrio del capital humano,

$$\gamma_h^* = \left((\phi-\rho-\delta)(1-\beta)\right) / \left(\sigma(1+\psi-\beta)-\psi\right), \tag{8.23}$$

que es una función de los parámetros del modelo. Empleando nuevamente la tasa de crecimiento del consumo, (8.16), obtendremos la del capital físico, el consumo y la producción:

$$\gamma_y^* = \gamma_k^* = \gamma_c^* = \left((\phi-\rho-\delta)(1-\beta+\psi)\right) / \left(\sigma(1+\psi-\beta)-\psi\right). \tag{8.24}$$

Vemos que, en ausencia de externalidades, $\psi = 0$, las tasas de crecimiento son $\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma_h^* = (\phi-\rho-\delta)/\sigma$. Es interesante observar que esta expresión es similar a la tasa de crecimiento que postula el modelo AK. La única diferencia es que el parámetro de productividad relevante para el crecimiento es ϕ (la productividad del sector educativo) en lugar de A (la productividad del sector de bienes finales). Es decir, en este modelo, el sector que realmente lleva el timón de la economía es el que permite generar capital humano.[2]

Para calcular la fracción de tiempo utilizado en la educación en el estado estacionario es necesario reagrupar términos en (8.5), de modo que:

$$1 - u^* = (\gamma_h^* + \delta + n)/\phi. \tag{8.25}$$

Si se impone a los parámetros las restricciones habituales de $0 < u^* < 1$ y $\gamma_h^* > 0$, nos enfrentamos a un problema que ya conocemos: la utilidad

[2]Este resultado se apoya de una manera crucial en el supuesto de que el sector educativo no utiliza capital físico. En un modelo más general en el que ambos sectores utilizan ambos tipos de capital, las productividades de los dos sectores afectan la tasa de crecimiento estacionaria. La importancia de los dos parámetros de productividad depende del tamaño relativo de las participaciones de los dos tipos de capital, α y β, en la producción. Véase Mulligan y Sala-i-Martin (1993) para una discusión más amplia de esta cuestión.

puede llegar a ser infinita. Así pues, es necesario acotar el valor de la utilidad, lo cual exige que

$$\rho - n > [(1-\sigma)(\phi - \delta - \rho)(1-\beta+\psi)]/[\sigma(1-\beta+\psi) - \psi]. \qquad (8.26)$$

3. La dinámica de la transición

A diferencia del modelo AK en el que la economía se encontraba en estado estacionario en todo momento, en este modelo hay un periodo de transición. Sin embargo, esta dinámica de transición es tan complicada que el propio Lucas la dejó sin investigar en su artículo original. En los últimos años varios investigadores han conseguido estudiar el comportamiento cuantitativo y cualitativo del modelo de Uzawa-Lucas durante la transición. Así, a título de ejemplo, Caballé y Santos (1993) demostraron que, en ausencia de externalidades, el modelo presenta una trayectoria estable hacia el punto de silla. No obstante, debido a la complejidad de los argumentos matemáticos que empleaban, el comportamiento cualitativo de las diferentes variables siguió sin ser explicado. Benhabib y Perli (1993) argumentan que, si la externalidad es lo suficientemente grande, en este modelo puede darse una multiplicidad de equilibrios (para alcanzar este resultado, linealizaron el sistema alrededor del estado estacionario y buscaron parámetros para los cuales se obtuviera más de un valor propio negativo). Faig (1991), por un lado, y Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 5) por otro, emplean argumentos gráficos para analizar la transición. Sin embargo, su análisis sólo es válido cuando no existen externalidades. Mulligan y Sala-i-Martin (1993) utilizan un método numérico llamado el *"método de eliminación temporal"* para calcular el comportamiento exacto de las diferentes variables a lo largo de la transición. Este método tiene la ventaja de que puede aplicarse al modelo de Uzawa-Lucas con o sin externalidades, así como a modelos aún más complicados (como por ejemplo aquel en el que para la producción de capital humano también es preciso capital físico). La desventaja de los métodos numéricos es que sólo es posible obtener un único resultado para cada conjunto de parámetros estudiados.

Con la intención de proporcionar una cierta intuición sobre los factores de los que depende la transición de este modelo vamos a considerar el caso en el que no existen externalidades. Se demostró anteriormente que en el caso en que $\psi = 0$, las tasas de crecimiento del capital físico y el humano en el estado estacionario coinciden, por lo que la relación de los dos tipos de capital, $(k/h)^*$, es constante. La dinámica de la transición surge si los stocks de capital iniciales de k y h son tales que su relación k_0/h_0 es diferente de $(k/h)^*$. Dicho de otro modo, en este modelo, la transición surge debido a la existencia de una descompensación entre los dos sectores, no debido a que el valor absoluto de la renta sea diferente al de estado estacionario. Al margen de este hecho, uno de los descubrimientos más interesantes es la aparición de un comportamiento asimétrico entre h y k: la tasa de crecimiento de una economía con una relación k_0/h_0 baja estará por encima de la del estado estacionario. La de una economía con una relación k_0/h_0 alta estará por debajo de la del estado estacionario (véase Mulligan i Sala-i-Martin (1993)). Por esta razón, una economía que perdiese una gran cantidad de población en relación con su dotación de capital físico (motivada, por ejemplo, por una guerra de neutrinos en la que muriera una gran cantidad de gente, pero que afectara relativamente poco al stock de capital) tendería a crecer más lentamente. Por el contrario, si una economía pierde una gran cantidad de capital físico en relación con su capital humano, la tasa de crecimiento durante la reconstrucción será alta. Podemos pensar en los casos de Alemania y Japón después de la Segunda Guerra Mundial como situaciones de este tipo.

4. La economía de planificador central

En una sección anterior se indicó que la diferencia entre el equilibrio del planificador y el del mercado reside en que el primero internaliza la externalidad, es decir, toma en consideración el hecho de que cuando alguien aumenta su stock de capital humano, también incrementa el stock medio de capital de la economía h_a. Esto afecta a la productividad de todos los demás miembros de la economía a través del término h_a^{ψ}. A diferencia de las familias productoras, el planificador tendrá en cuenta este efecto subsidiario. De este modo, al calcular el planificador las condiciones de primer orden con respecto a h, también incluirá la derivada de h. El resto de solución no entraña especial dificultad. La tasa final de crecimiento del capital humano vendrá dada por

$$\gamma_h^* = \sigma^{-1}\left(\phi - [(1-\beta)(\rho+\delta) + \psi(\delta+n)]/(1+\psi-\beta)\right) \qquad (8.27)$$

Obsérvese que, tal como era de esperar, en ausencia de externalidades la tasa de crecimiento coincide con la que se obtiene en una economía competitiva, $\gamma^* = \sigma^{-1}(\phi - \rho - \delta)$. Es decir, si no existen externalidades el equilibrio competitivo es óptimo, ya que los incentivos privados y sociales a invertir en educación coinciden. Cuando la externalidad es positiva, por otra parte, la tasa óptima de crecimiento es siempre mayor que la tasa de crecimiento competitiva. El motivo de esta discrepancia proviene del hecho de que el rendimiento privado de invertir en enseñanza es inferior al rendimiento social, por lo que, en una economía de mercado, el público no invertirá en capital humano tanto como sería socialmente deseable.

Stokey (1991) proporciona una extensión interesante de este modelo para una economía abierta. En su modelo, gente dotada con diferentes cantidades de capital humano produce diferentes tipos de bienes. El resultado es que el libre comercio podría ser perjudicial para los países pobres, ya que podría desalentar la inversión en capital humano. Por último, Stokey utiliza este marco para analizar las repercusiones de la apertura de una economía para el comercio internacional.

9. MODELOS DE CRECIMIENTO CON I+D: LA EXPANSIÓN DEL NUMERO DE PRODUCTOS

1. Introducción

En los modelos de crecimiento endógeno descritos hasta el momento se señala como principal motor del crecimiento la ausencia de rendimientos decrecientes del capital. En el capítulo 3 señalamos, por otra parte, que el modelo neoclásico de Ramsey era consistente con la existencia de una tasa de crecimiento positiva a largo plazo únicamente si la tecnología de la economía crecía a una tasa exógena. En el modelo de Romer (1986) el progreso tecnológico estaba concebido como un subproducto de la inversión, a través del aprendizaje por la práctica. Por esta razón, en este modelo, aunque la tasa de avance técnico se modifique en respuesta al comportamiento de los agentes, no es aún el resultado de una actividad expresa en este sentido. Una parte importante de la literatura del crecimiento endógeno se ocupa de los determinantes de la tasa de progreso técnico y los relaciona con la tasa agregada de crecimiento de la economía. El elemento común de todos esos modelos es la existencia de empresas dedicadas a la investigación y el desarrollo (I+D).

En este tipo de estudios, para transformar la endogeneización de la tecnología en un problema tratable, se han utilizado dos enfoques fundamentales. Un primer tipo de modelización considera que el progreso técnico toma la forma de un aumento en el número de productos o bienes de capital disponibles como factores de producción. La diferencia entre los Estados Unidos y Zimbabwe, argumentaría este enfoque, no es que los Estados Unidos utilicen más picos y palas para producir el mismo producto agrícola, sino que utilizan picos, palas, tractores, fertilizantes, mangueras, canales, etc. Es decir, utilizan una mayor variedad de inputs.[1] El supuesto fundamental de este tipo de modelos es que no existen rendimientos decrecientes en el número de bienes de capital, por lo que el modelo es capaz de generar un crecimiento económico sostenido, ya que las empresas de I+D siempre desean descubrir nuevos productos. Se pueden hallar ejemplos de este tipo de modelos en Romer (1987, 1990), Grossman y Helpman (1991, capítulo 4), y Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 6).

El segundo enfoque consiste en considerar que el progreso técnico se cristaliza en el aumento de la *calidad* de un número limitado de productos. Es decir, el progreso tecnológico experimentado por las economías modernas del siglo XX ha sido en gran medida reflejado en una superación paulatina de la calidad de los diferentes productos. Por ejemplo, en el mundo de la reproducción del sonido, se pasó sucesivamente del gramófono al tocadiscos, al audiocasete, al disco compacto. Lo mismo se puede decir de los mundos del transporte, de la informática, de las finanzas, de la ingeniería genética, etcétera. Un aspecto fundamental de los llamados modelos de "escaleras de calidad" ("quality ladders") es lo que Schumpeter llamó la destrucción creativa: cuando una empresa supera la calidad de un cierto producto (crea) hace que la generación anterior sea obsoleta (destruye) y, por lo tanto, se apropia del mercado de ese tipo particular de bienes. De hecho, el único objetivo de las empresas que invierten en I+D es el de apropiarse de los mercados de las empresas que ya están instaladas. Éstas, a su vez, invierten en I+D para mantener su liderazgo tecnológico, así como su propio mercado. Se entabla pues una guerra tecnológica entre líderes y seguidores, el resultado de la cual es el progreso tecnológico. Para modelos de escaleras de calidad y crecimiento, véase por ejemplo Aghion y Howitt (1992), Grossman y Helpman (1991, capítulo 4) y Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 7). La dificultad matemática que envuelve a este tipo de modelos es elevada, por lo que no los formalizaremos en este libro.

[1] Otra diferencia fundamental es que el número de productos para el consumo en los países desarrollados es mayor. Es decir, no es que en los Estados Unidos se consuma mucho más cereal que en Ghana. Lo que sí es cierto es que se consumen cereales, carne, televisores, videojuegos, coches, tocadores de la Señorita Pepis, discos compactos, etcétera. Hay toda una gama de modelos de crecimiento en los que el progreso tecnológico se cristaliza en un aumento del número de productos. Estos modelos, al ser formalmente parecidos a los modelos en los que aumenta el número de inputs, no serán formalizados en este texto.

En este capítulo describiremos una versión simplificada de uno de los modelos de aumento del número de bienes, concretamente el de Romer (1990). En esta clase de economías existen tres tipos de agentes. En primer lugar los productores de bienes finales, que utilizan en su actividad una tecnología que emplea trabajo y una serie de bienes de capital que deben alquilar a las empresas que los han desarrollado o inventado. En segundo lugar se encuentran los propios inventores de los bienes de capital. Éstos invierten una cierta cantidad de recursos (I+D) para crear nuevos productos y, una vez los han desarrollado, poseen una patente que les da un monopolio perpetuo para su producción y alquiler. Por último, nos encontramos con los consumidores, que eligen la cantidad que desean consumir y ahorrar para maximizar la función de utilidad habitual, sujeta a una restricción temporal intertemporal. A continuación vamos a describir con mayor detalle el comportamiento de estos tres conjuntos de agentes.

2. Los productores de bienes finales

Los productores de bienes finales se enfrentan a una función de producción que presenta la siguiente forma:

$$Y_t = A\left(\sum_{i=1}^{N(t)} x_{it}^{\beta}\right) L_t^{1-\beta}, \tag{9.1}$$

siendo x_i los bienes intermedios de capital, A es un parámetro tecnológico y L es el trabajo. En otras palabras, la producción se obtiene a partir de trabajo y de un conjunto $N(t)$ de factores x_i (notemos que N depende del tiempo). Spence (1976) y Dixit y Stiglitz (1977) plantearon modelos estáticos en los que la utilidad dependía del número de bienes de consumo de la economía, en una formulación similar a (9.1). Ethier (1982) reinterpretó la función de utilidad en términos de la producción de un único bien de consumo que se obtenía a partir de varios factores de producción. Éste es el enfoque que hemos escogido en nuestro modelo dinámico.

El progreso tecnológico se presenta bajo la forma de un aumento constante del número de inputs, $N(t)$. El hecho de que la función (9.1) sea aditivamente separable comporta que los nuevos bienes de capital son diferentes a los anteriores, aunque no sean ni mejores ni peores que éstos. En particular, los bienes antiguos nunca se quedan obsoletos. Un aspecto importante de (9.1) es que presenta rendimientos decrecientes respecto a cada bien de capital x_i, aunque presenta rendimientos constantes del capital respecto de la cantidad total de estos bienes $N(t)$. Esto se puede apreciar suponiendo que, en cada momento del tiempo, la cantidad de dichos bienes sea la misma $x_i = x$ para todo i (como veremos, esto es lo que ocurrirá en equilibrio). En este caso la producción puede escribirse como:

$$Y = A(Nx)^{\beta} N^{1-\beta} L^{1-\beta}. \tag{9.2}$$

Para un valor de N dado, la ecuación (9.2) implica que la producción exhibe rendimientos constantes respecto a L y Nx. Si lo que tomamos como dado es L y Nx, la ecuación (9.2) indica que la producción aumenta al aumentar el número de bienes de capital. Por último, tomando L como dado, la producción presenta rendimientos decrecientes respecto de Nx si el aumento de Nx procede de un aumento en x, pero esto no es así en el caso de que provenga de un aumento en N. Y es precisamente esta constancia de los rendimientos de N lo que permite a la economía generar tasas de crecimiento positivas para siempre (en este sentido, este modelo no es más que un modelo AK, en el cual el bien que se acumula es el número de bienes de capital N).

Las empresas contratan el trabajo en un mercado competitivo y alquilan cada uno de los $N(t)$ tipos de capital x_i al precio unitario R_i. Con el concurso de estos factores de producción, combinados con trabajo de acuerdo con la tecnología (9.1), obtienen el producto Y_t, que venden a un precio que, por normalización, supondremos igual a uno. Así pues, su comportamiento se reduce a maximizar el valor presente de todos los flujos de caja que percibirán en el futuro:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} \left(Y_t - \sum_{i=1}^{N(t)} R_i x_{it} - wL_t \right) dt, \tag{9.3}$$

en el cual Y_t viene dado por (9.1). Dado que este problema no incorpora elementos de tipo intertemporal (no existen costes de ajuste ni ningún bien acumulable), la maximización de (9.3) es equivalente a la maximización de

los beneficios corrientes en cada momento del tiempo: $Y_t - \sum_{i=1}^{N(t)} R_i x_i t - wL_{it}$. Las condiciones de primer orden imponen la igualdad entre los productos marginales y las tasas de alquiler. Puesto que suponemos que no existe crecimiento de la población, las condiciones de primer orden del bien x_i se pueden escribir como

$$A\beta x_i^{\beta-1} L^{1-\beta} = R_i, \tag{9.4}$$

lo que constituye la función de demanda del bien x_i. Según esta función, la demanda de x_i está negativamente relacionada con el precio unitario del alquiler R_i, $x_i = \left(R_i/(A\beta L^{1-\beta})\right)^{-1/(1-\beta)}$, donde la elasticidad de demanda viene dada por $-(1-\beta)$.

3. Las empresas de I+D y la creación de nuevos bienes (Inventores)

Para crear nuevos bienes de capital, las empresas de I+D deben invertir recursos. Supondremos que esta inversión consiste en una cantidad constante, que se detrae de la producción, η.[2] Una vez que el bien ha sido desarrollado, su producción se obtiene con un coste marginal constante, ν, y es alquilado al precio R_i a los productores de bienes finales: la sociedad otorga a las empresas que se dedican a la investigación un monopolio

[2]Romer (1990) y Grossman y Helpman (1991, capítulo 3) suponen que la tecnología de investigación utiliza únicamente trabajo. En este caso, los cambios en los salarios reales afectan al coste de las actividades de I+D. En particular, a medida que la economía crece, los salarios aumentan y, con ellos, también aumentan los costes de investigación. Si no se introducen supuestos adicionales, la economía dejará de crecer ahogada por unos costes de investigación cada vez mayores y unas tasas de rendimiento de I+D cada vez menores. El truco introducido por Romer y Grossman y Helpman es el de suponer que hay una externalidad en la tecnología de I+D. Para un nivel de salarios dados, se supone que los costes de I+D son menores cuanto mayor sea el número de bienes ya inventados (como si se tratara de una especie de experiencia). Este efecto hace que a medida que la economía crece, los costes de investigación se reducen, lo cual tiende a contrarrestar el aumento de salarios. En el caso particular de que las dos fuerzas opuestas sean del mismo tamaño, tendremos que los costes de I+D son constantes tal y como ocurre con nuestro modelo, lo que permite generar crecimiento a largo plazo. Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 6) discuten la relación entre modelos en los que los costes de investigación dependen únicamente del trabajo y los que dependen de la totalidad del producto.

La Patente

perpetuo[3] sobre los bienes que desarrollen. Ésta es la razón por la que están en situación de cargar un precio del alquiler por encima de los costes marginales, lo que les permite recuperar sus inversiones iniciales de I+D. En consecuencia, deben elegir el precio del alquiler R_i y la cantidad a producir de los bienes que han desarrollado para maximizar sus beneficios, teniendo en cuenta que la demanda de los bienes por ellos producidos viene dada por (9.4)

$$\max_{x_i} \int_0^{\infty} e^{-rt} \left[R_i x_i(t) - \vartheta I_i(t)\right] dt - \vartheta x_i(0) - \eta \tag{9.5}$$

sujeto a las restricciones $I_i(t) = \dot{x}_i(t)$ y (9.4). Supondremos que no existe depreciación de los bienes x_i en ningún momento del tiempo, de modo que la inversión bruta coincide con la inversión neta. Hacemos notar que (9.5) incluye las rentas de alquiler entre el momento inicial e infinito, descontadas al tipo de interés real r (en equilibrio, la tasa de interés r es constante); también incorpora los costes marginales futuros de producir cantidades crecientes de $x_1(I_i(t)$ es el aumento de la producción de x_i), el coste marginal de producir la cantidad inicial $x_i(0)$ y los costes fijos de la inversión en I+D, η. Una vez establecido esto, ya estamos en condiciones de plantear el Hamiltoniano de este problema

$$H = e^{-rt} \left[[A\beta x_i^{\beta-1} L^{1-\beta}]x_i(t) - \vartheta I_i(t)\right] - \vartheta x_i(0) - \eta + q_i(t) I_i(t) \tag{9.6}$$

en el cual $q_i(t)$ es el multiplicador dinámico y R_i ha sido reemplazado por su valor, tal como aparece en (9.4). Las condiciones de primer orden son, entonces,

$$e^{-rt}\vartheta = q_i(t) \tag{9.7}$$

$$-\dot{q}_i(t) = e^{-rt} L^{1-\beta} A\beta^2 x_i^{-(1-\beta)}, \tag{9.8}$$

junto con la condición de transversalidad $\lim_{x_i \to \infty} q_i x_i = 0$. Obsérvese que, una vez que se han tomado logaritmos y derivadas, la ecuación (9.7)

[3]Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 6) presentan un modelo sencillo en el que en cualquier momento del tiempo el monopolio de producción del bien inventado puede desaparecer con una cierta probabilidad.

se transforma en $-\dot{q}_i/q_i = r$. Empleando esta relación y (9.7), podemos escribir (9.8) como

$$r = A\beta^2 L^{1-\beta} x_i^{\beta-1}/\vartheta, \tag{9.9}$$

que muestra la relación existente entre x_i y el tipo real de interés. De todos modos, conviene reescribir esta relación de la siguiente forma:

$$x_i(t) = \left[A\beta^2 L^{1-\beta}/r\vartheta\right]^{1/(1-\beta)}. \tag{9.10}$$

Un aspecto interesante de (9.10) es que $x_i(t)$ es una función de una serie de parámetros y de r, el tipo de interés de la economía, pero, en particular, es independiente de i. De este modo, las cantidades producidas de todos los bienes i serán las mismas, es decir, $x_i = x$ para todo i. Además, dado que el tipo de interés de equilibrio, al transcurrir el tiempo acabará siendo constante, $x_i(t)$ también se hará constante. En consecuencia, la inversión en cada uno de los bienes valdrá cero $I_i(t) = 0$ para todo t. Cuando se descubra un nuevo bien, se producirá la cantidad $x_i(0)$ de forma instantánea, y no se volverá a producir nunca más.[4]

Para obtener el precio óptimo del alquiler debemos sustituir x_i en (9.4)

$$R_i = r\vartheta/\beta. \tag{9.11}$$

Esta ecuación puede ser interpretada de la siguiente forma: el valor de los activos de una empresa que invierte en I+D y descubre una nueva variedad de bienes es igual al valor presente de todos los ingresos futuros procedentes del alquiler de éstos, R_i/r. La ecuación (9.11) indica, pues, que el precio de tales activos es un margen constante sobre el coste marginal, siendo el margen una función de la elasticidad de la demanda (este resultado proviene del supuesto de la elasticidad constante de la demanda, derivado a partir de [9.4]). Obsérvese que R_i es independiente de i, por lo que, en el mercado, el valor del alquiler de todos los bienes será el mismo.

[4]Este resultado es fruto de la ausencia de depreciación. Si la hubiéramos introducido en el modelo, la tasa de inversión bruta debería haber sido positiva para que la cantidad de x_i se mantuviese constante a lo largo del tiempo.

El supuesto de la libre entrada en las actividades de I+D implica que el coste de invertir en I+D debe ser igual al valor presente de todos los beneficios futuros, es decir,

$$\int_0^\infty e^{-rt}\left[R_i x_i(t) - \vartheta I_i(t)\right] dt - \vartheta x_i(0) = \eta. \tag{9.12}$$

Puesto que $x_i(t)$ debe ser igual a $x_i(0)$ en todos los periodos, e $I(t)$ vale cero para todo t, podemos calcular fácilmente el valor presente de la anterior expresión, de modo que

$$R_i x_i / r = \vartheta x_i + \eta. \tag{9.13}$$

A continuación, para hallar la relación entre x_i y los parámetros del modelo, tomaremos el valor del precio del alquiler (9.11) y (9.13):

$$x_i = \eta\beta/[\vartheta(1-\beta)]. \tag{9.14}$$

La ecuación (9.14) nos indica que, en equilibrio, la cantidad producida de cada bien es constante e igual para todos los bienes. En este punto, es posible combinar (9.14) y (9.13) para hacer desaparecer x_i de estas expresiones,

$$r = AL^{1-\beta}\beta[\beta/\vartheta]^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}/\eta^{(1-\beta)}, \tag{9.15}$$

que expresa una relación constante entre el tipo real de interés y los parámetros del modelo.

4. Los consumidores

Para cerrar el modelo es preciso especificar el comportamiento temporal de los consumidores. Éstos, en primer lugar tienen acceso a un mercado de activos que genera un tipo de interés r. Por otra parte, reciben ingresos procedentes del trabajo y de los activos de los que son propietarios y deben elegir entre consumir y ahorrar para maximizar una función de utilidad que tiene la forma habitual, enfrentándose, asimismo, a la restricción usual. Dado que este problema ha sido resuelto en capítulos anteriores, no lo reproduciremos aquí. Sólo recordaremos que la ecuación de Euler resultante es:

$$\gamma_c = \dot{c}/c = (1/\sigma)(r-\rho). \tag{9.16}$$

Si se sustituye (9.15) en (9.16) hallaremos la tasa de crecimiento de la economía:

$$\gamma^* = (1/\sigma)\left(A\beta L^{1-\beta}(\beta/\vartheta)^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}/\eta^{(1-\beta)} - \rho\right). \tag{9.17}$$

Hacemos notar que la tasa de crecimiento está inversamente relacionada con el coste de las actividades de I+D, η. También guarda esta relación con el precio de monopolio que cargan las empresas de I+D, ϑ/β (si volvemos a la expresión [9.11], observaremos que ϑ/β es, precisamente, el margen constante que se aplica sobre el coste marginal). Las tasas de crecimiento de la producción y de N en estado estacionario coinciden con la tasa de crecimiento de c, por lo que también vienen dadas por (9.17).

Por último, es de destacar que la tasa de crecimiento depende de forma positiva del tamaño de la población de la economía, L. Es decir, este modelo, como el de Romer (1986) que se describió en el capítulo 7, presenta un efecto de escala. El motivo es que la tecnología es un bien no rival: el coste de desarrollar un nuevo producto es independiente del número de personas que lo utilicen. De este modo, como la proporción de los recursos destinados a la investigación permanece constante, todo incremento de la población lleva aparejado un aumento del ritmo de avance tecnológico.

5. La solución del planificador

El planificador maximiza la función de utilidad (5.2) sujeto a la restricción de recursos de toda la economía, que requiere que la renta total, $Y = AL^{1-\beta}Nx^{\beta}$, sea igual a la utilización total de bienes finales $c + \dot{N}\eta + (\vartheta x)\dot{N}$. Escribimos el Hamiltoniano de la forma habitual, calculamos las condiciones de primer orden y encontramos que la tasa de rendimiento que obtiene el planificador será:

$$r_{\text{plan}} = A\beta L^{1-\beta}\vartheta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}/\eta^{(1-\beta)}, \tag{9.18}$$

y la tasa de crecimiento correspondiente es

$$\gamma^*_{\text{plan}} = (1/\sigma)\left(A\beta L^{1-\beta}\vartheta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}/\eta^{(1-\beta)} - \rho\right). \qquad (9.19)$$

Por lo que al final resulta que, si la tecnología de producción viene dada por una función Cobb-Douglas, la elección de x en competencia perfecta coincide con la cantidad que hubiera escogido el planificador.

Debemos hacer notar que la única diferencia que existe entre (9.19) y (9.17) es que la tasa de crecimiento del planificador incorpora el coste marginal de producción de los bienes, ϑ, mientras que la tasa competitiva incorpora el precio de monopolio (es decir, el coste marginal incrementado por el margen sobre los costes marginales ϑ/β). Dicho de otro modo, la principal, o mejor dicho, la única distorsión del modelo es la utilización de un precio de monopolio por parte de las empresas de I+D. Al ser ese precio superior al precio que dictaría el planificador, la solución de mercado no es óptima en el sentido de Pareto. La intuición es que un precio elevado reduce la demanda de producto. El valor presente descontado de todas las ventas futuras cuando el precio de mercado es monopolístico es inferior, por lo que el rendimiento de la inversión en I+D es menor de lo que sería si se vendiera la cantidad correspondiente a precios de equilibrio competitivo. Este menor rendimiento conlleva a una menor inversión y, como consecuencia, una tasa de crecimiento inferior.

Un tipo de política que parece bastante natural en este modelo, pero que en la práctica no funciona, consiste en dar un subsidio a la investigación. En efecto, observemos que la tasa de rendimiento privado depende del coste de las actividades de I+D a través del término $\eta^{-(1-\beta)}$. Es posible aumentar la tasa privada de rendimiento a través de la concesión de subsidios a las actividades de I+D. El problema de esta política es que también introduce una distorsión respecto a la cantidad de x que se elige y, por ello, la elección de x no sería óptima en el sentido de Pareto (recordemos que el planificador y la economía competitiva eligen la misma cantidad de x, que es la cantidad eficiente). Una política que llevaría a la economía al óptimo es la de subsidiar las compras o alquileres de productos intermedios por parte de las empresas de bienes finales de manera que éstas se enfrentaran a un precio competitivo. Este subsidio corregiría la cantidad demandada de los productos intermedios al enfrentarse los demandantes de inputs a un precio competitivo. Ello, a su vez, haría que el rendimiento privado de la inversión en I+D fuera igual al rendimiento social y, por lo tanto, la inversión privada fuera óptima.

6. Competencia en calidad y el crecimiento a través de la creación destructiva

Tal como se indicó al principio de este capítulo, el progreso técnico se puede modelizar a través de una mejora de la calidad de los productos existentes, en lugar de como un aumento en el número de éstos. El modelo de incrementos de la calidad nos da luz sobre nuevas cuestiones que no aparecían en el modelo de aumentos en la cantidad de productos que acabamos de ver (véase Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 7) para un tratamiento sencillo de este problema, de por sí altamente complicado). Una lección que aparece en los modelos de escaleras de calidad es el hecho de que dado que los bienes de alta calidad tienden a dejar obsoletos a los bienes más antiguos, los agentes privados tienen un incentivo a sobreinvertir.

El motivo es que, cuando una empresa desarrolla un nuevo producto, se adueña del mercado de su predecesor y, por consiguiente, no internaliza las pérdidas de éste. El planificador, por otra parte, sí lo hace. Lo que ocurre es que los investigadores consideran sus invenciones como temporales, mientras que el planificador las toma como permanentes (el conocimiento aportado por la creación de un bien mejor se mantiene para siempre). Se puede demostrar, no obstante, que el primer efecto siempre domina al segundo. En consecuencia, y dejando aparte el efecto del precio de monopolio, el modelo predice la existencia de un exceso de inversión y de un crecimiento excesivo. La implicación en términos de medidas de política económica es que las empresas que realizan innovaciones deberían compensar a los productores anteriores por las pérdidas en que éstos incurren cuando las primeras se apropian del mercado. Barro y Sala-i-Martin (1994, capítulo 7) demuestran que si el líder tecnológico se enfrenta a unos costes de investigación suficientemente inferiores a los de los seguidores (quizá debido a que la propia experiencia sirve para reducir costes de I+D) entonces será el propio líder el que se dedique a investigar y superar sus propios productos. Al "robarse" su propio negocio, el líder tendrá en cuenta no sólo las ganancias de la creación sino las pérdidas de la destrucción de mercados. En este caso, no es cierto que la inversión en I+D sea excesiva, tal como predicen los modelos de Aghion y Howitt y Grossman y Helpman.

7. Futuras líneas de investigación

Acabemos este capítulo con la descripción de lo que podrían ser líneas de investigación prometedoras para el futuro.

Difusión tecnológica

En primer lugar, creemos que un área en la que se investigará intensamente en un futuro cercano es la de la difusión tecnológica.

En el mundo actual hay unos pocos países en los que la inversión en I+D parece importante. El resto del mundo se limita a esperar que los líderes tecnológicos inventen nuevos productos o mejoren la calidad de los productos existentes para después copiarlos, imitarlos o simplemente comprarlos. El conocimiento adquirido en un país se difunde lentamente a través de las fronteras. Es importante llegar a identificar los factores que determinan que la tecnología se transmita a unos, pero no a todos los países. Por ejemplo, debemos llegar a responder a preguntas como: ¿Por qué los países del este asiático son capaces de imitar las tecnologías inventadas en los Estados Unidos y los países africanos no? Para poder hacerlo, ¿han debido seguir políticas de exportación, políticas de educación de su fuerza de trabajo, políticas de subsidio a los sectores de imitación tecnológica, u otro tipo de políticas? ¿Qué papel juega la inversión extranjera en la difusión tecnológica? La transmisión de la tecnología a través de las fronteras es un tema que, desde nuestro punto de vista, ocupará una parte significativa de la agenda investigadora de los teóricos de la economía del crecimiento.

El desarrollo del sistema financiero y el crecimiento

Otra línea de investigación que parece altamente prometedora consiste en vincular el coste de llevar a cabo actividades de I+D con la eficiencia del sistema financiero.[5] Schumpeter escribió que "los banqueros son los porteros del desarrollo económico capitalista; tienen una misión estratégica que consiste en pasar por una criba a los innovadores potenciales, y avanzar el necesario poder de compra a los más promisorios. Ellos son la fuente del poder de compra para la inversión y la innovación, más allá de los ahorros acumulados en el curso del desarrollo económico pasado" (Schumpeter, 1934).

El modelo de I+D que se acaba de bosquejar parece ideal para intentar capturar la idea schumpeteriana del desarrollo financiero. En este aspecto, la endogeneización del parámetro η, mediante su vinculación a la eficiencia del sector financiero en la selección de los diferentes proyectos de investigación, tiene todos los visos de ser otra área fructífera para futuras investigaciones. Algunos trabajos preliminares en esta dirección han sido ya realizados por King y Levine (1993) y De La Fuente y Marín (1994).

[5]Greenwood y Jovanovic (1990) presentaron un modelo de crecimiento y desarrollo financiero, en el cual las diferentes empresas de la economía están sujetas a perturbaciones externas, pero poseen una información limitada sobre el estado de la economía. Sin embargo, pueden ingresar en un grupo de instituciones (el sector financiero) que les proporciona esta información a cambio de una comisión. A partir de una simple tecnología AK, demostraron cómo la creación de un sector financiero promueve el crecimiento endógeno y viceversa: en los países desarrollados los individuos consideran que es rentable pagar una comisión para ingresar en el sector financiero. De este modo, el modelo genera crecimiento endógeno e innovación financiera endógena.
Bencivega y Smith (1991) construyeron un modelo en el que es necesario dinero para efectuar las transacciones. Suponen que los individuos viven durante tres periodos, aunque trabajan y realizan sus decisiones de inversión en el primero de ellos, y esto pese a que el rendimiento de la inversión no madura hasta el tercero. En este modelo, pues, el sector financiero proporciona un servicio de liquidez a los agentes. En su ausencia, el público estaría tentado a poner sus ahorros debajo de la almohada en lugar de invertirlo en actividades productivas, debido a que existe el temor fundado de quedarse sin activos líquidos durante el segundo periodo. Una inversión reducida viene acompañada, en consecuencia, de un bajo crecimiento. Cuando se desarrolla el sector financiero, la inversión de la economía aumenta y, con ella, lo hace el crecimiento.