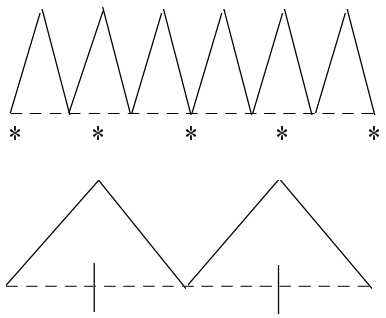
# 4. Antialias

Los primitivos dibujados tienen una apariencia de peldaños o escalones (jaggies o staircases) porque el proceso de coordenadas digitaliza los puntos de coordenadas en un objeto a posiciones discretas de pixeles enteros.
Esta distorsión de la información como consecuencia del muestreo de baja frecuencia (submuestreo) se llama creación de **alias**.
Podemos mejorar la apariencia de las líneas de rastreo desplegadas al aplicar métodos de creación de **antialias** que compensen el proceso de submuestreo.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de los efectos de submuestreo:



Con el fin de evitar la perdida de información de tales objetos periódicos, necesitamos establecer la frecuencia de muestreo mínima como el doble de la frecuencia mas alta que ocurre en el objeto, lo cual se denomina **frecuencia de muestreo nyquista** (o índice de muestreo nyquista) $f_s$:

$$f_s = 2 f_{max}$$

Otra manera de expresar esto es que el intervalo de muestreo debe ser mayor que la mitad del intervalo del ciclo (llamado **intervalo de muestreo nyquista**).
Para el muestreo del intervalo $x$, el intervalo de muestreo nyquista $\Delta x_s$ es:

$$\Delta x_s = \Delta x_{ciclo} / 2$$

donde $\Delta x_{ciclo} = 1/ f_{max}$.
En la figura anterior, el intervalo de muestreo es de una y media veces el intervalo del ciclo, de modo que el intervalo de muestreo es tres veces mas grande que el mínimo.
Si deseamos recuperar toda la información del objeto, necesitamos reducir el intervalo de muestro a una tercera parte del tamaño que se presenta en la figura.

### 4.1 Incrementar la resolución

Una manera de incrementar el índice de muestreo con sistemas de rastreo consiste solo en desplegar objetos con una resolución mas alta.
Pero incluso con la mayor resolución posible con la tecnología actual, se podrán percibir los peldaños en cierto grado.
Por ejemplo, duplicando la resolución horizontal y vertical al doble, haría que la línea pasara por el doble de columnas que antes y tuviera el doble de escalones, pero cada uno de ellos siendo la mitad en $x$ y $y$.
Aunque la figura resultante se ve mejor, la mejora tiene un precio de cuadruplicar el costo de memoria, ancho de banda de memoria, y tiempo de conversion de rastreo.
Existe un limite para el tamaño máximo que podemos dar al bufer de estructura y conservar aún el índice de refrescado en 30 a 60 cuadros por segundo.

Y para representar con precision objetos con parámetros continuos, necesitamos intervalos de muestreo arbitrariamente pequeños.
Así, a menos que se desarrolle la tecnología de hardware para manejar bufers de estructuras grandes, de modo arbitrario, una mayor resolución de la pantalla no es una respuesta completa para el problema de los alias.

Con sistemas de rastreo que son capaces de desplegar mas de dos niveles de intensidad (color o escala de gris), podemos aplicar métodos de antialias para modificar las intensidades de pixel.
Al variar en forma apropiada las intensidades de los pixeles a lo largo de las fronteras de primitivos, podemos corregir las aristas para disminuir la apariencia de peldaños.

A la técnica de asignar la intensidad proporcional a la cantidad de area cubierta se le conoce como **muestreo de area sin-peso (unweighted area sampling)**. Esta técnica produce resultados mucho mejores que asignar a los pixeles una intensidad completa o una intensidad de cero, pero existe inclusive una estrategia mejor llamada **muestreo de area con-peso (weighted area sampling)**.
Para explicar la diferencia entre las dos formas de muestreo de area, se nota que el muestreo de area sin peso tiene las siguientes tres propiedades:

1. La intensidad de un pixel intersectado por la línea de borde del polígono se decrementa según aumenta la distancia entre el centro del pixel y la arista: Lo mas lejano una primitiva esta, menor es la influencia que tiene sobre la intensidad del pixel. Esta propiedad es obviamente cierta ya que la intensidad baja según se reduce el area de traslape, y esa area se reduce según la arista de la línea se mueve hacia afuera del centro del pixel y hacia el borde del pixel. Cuando la línea cubre completamente el pixel, el area traslape y por lo tanto su intensidad están en su máximo; cuando la arista primitiva es solo una tangente al borde, el area y por lo tanto la intensidad son cero.
2. Un primitiva no puede influenciar la intensidad de un pixel si la primitiva no intersecta el pixel - o sea, si no intersecta la cuadricula representada por el pixel.
3. Areas iguales contribuyen intensidades iguales, sin importar la distancia entre el centro del pixel y el area; solo importa la cantidad total de traslape. Por lo tanto, un area pequeña en la esquina del pixel contribuye lo mismo que un area de igual tamaño cerca del centro del pixel.

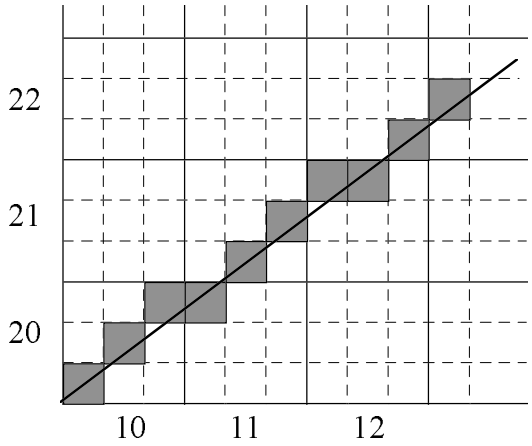
**4.2 Muestreo de Area Sin-Peso**

Un método directo de antialias consiste en incrementar el índice de muestreo al considerar la pantalla como si estuviera cubierta con una cuadricula mas delgada de la que en realidad esta disponible.
Así, podemos utilizar puntos de muestreo multiples a lo largo de esta cuadricula mas delgada con el propósito de determinar el nivel de intensidad adecuado para cada pixel de la pantalla.
Esta técnica de muestreo de las características del objeto con una alta resolución y despliegue de los resultados con una resolución menor se llama **sobremuestreo** (o **postfiltración**, puesto que el método general implica el calculo de las intensidades en las posiciones de la cuadricula de subpixel y entonces combina los resultados para obtener las intensidades de pixel).
Las posiciones de pixel que se despliegan son manchas de luz que cubren una area finita de la pantalla y no puntos matemáticos infinitesimales.
También en los algoritmos de línea y de area de llenado, se determina la intensidad de cada pixel por medio de la posición de un punto individual en la frontera del objeto.
Al realizar un sobremuestreo, obtenemos información de intensidad de multiples puntos que contribuyen a la intensidad general de un pixel.

Es posible efectuar el sobremuestreo de líneas rectas de varias maneras.
Una alternativa para el sobremuestreo es la determinación de la intensidad del pixel al calcular el traslape de cada pixel con los objetos que se deben desplegar.
El establecimiento de antialias al calcular las areas de traslape se denomina **muestreo de area (area sampling**, o **prefiltración**, dado que la intensidad del pixel como un todo se determina sin calcular las intensidades de los subpixeles).

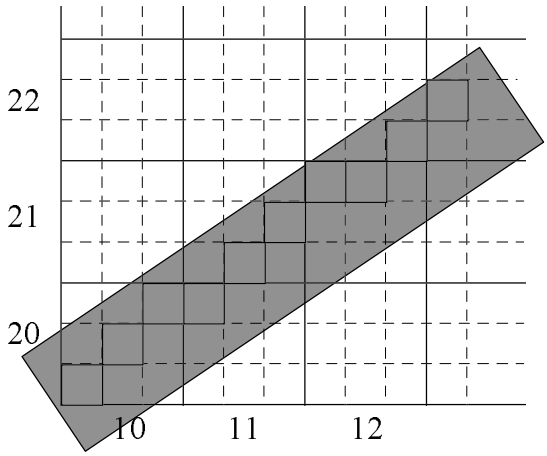
Las areas en que se sobreponen pixeles se obtienen al determinar donde se intersectan las fronteras del objeto con las fronteras de pixeles individuales.

Para el despliegue de escala de gris de un segmento de línea recta, podemos dividir cada pixel en un numero de subpixeles y contar el numero de subpixeles que se localizan sobre la trayectoria de la línea.
Así, se establece el nivel de intensidad para cada pixel como un valor que es proporcional a esta cuenta de subpixeles.
En la siguiente figura se muestra un ejemplo de este método:




El area de cada pixel cuadrado se divide en nueve subpixeles cuadrados del mismo tamaño y las regiones sombreadas muestran los subpixeles que se seleccionaran con el algoritmo de Bresenham.
Este esquema sostiene tres definiciones de intensidad mayor que cero, ya que, como máximo, se pueden seleccionar tres subpixeles adentro de cualquier pixel.
Para este ejemplo, el pixel en la posición (10,20) se define en la intensidad máxima (nivel 3); cada uno de los pixeles en (11,21) y (12,21) se establecen en el nivel de intensidad mas alto (nivel 2); y cada uno de los pixeles en (11,20) y (12,22) se establecen en el nivel inferior de intensidad mayor que cero (nivel 1).
Así, se extiende la intensidad de la línea sobre un gran numero de pixeles y se reduce el efecto de los peldaños al desplegar una trayectoria de línea en cierto modo borrosa en el area cercana a los escalones (entre tramos horizontales).
Si queremos utilizar mas niveles de intensidad para efectuar el antialias de la línea con este método, incrementamos el numero de posiciones de muestreo a lo largo de cada pixel.
Dieciséis subpixeles nos dan cuatro niveles de intensidad mayores que cero; veinticinco subpixeles nos dan cinco niveles, y así en forma sucesiva.

En el ejemplo de sobremuestreo anterior, consideramos areas de pixel de tamaño finito, pero consideramos la línea como una entidad matemática con anchura cero.
En realidad las líneas que se despliegan tiene una anchura que es aproximadamente igual que la de un pixel.
Si tomamos la anchura finita de la línea, podemos realizar el sobremuestreo al determinar la intensidad de cada pixel como proporcional al numero de subpixeles adentro del polígono que representa el area de la línea.
Se puede considerar que un subpixel esta adentro de la línea si su esquina inferior izquierda esta adentro de las fronteras del polígono.
Una ventaja de este procedimiento de sobremuestreo es que el numero de niveles de intensidad posibles para cada pixel equivale al número total de subpixeles en el area del pixel.
Por ejemplo, en la figura anterior, podemos representar esta línea con anchura finita al disponer de las fronteras del polígono paralelas a la trayectoria de la línea, como se muestra en la siguiente figura.




Y ahora, se puede asignar a cada pixel uno de nueve niveles de brillantez posible mayores que cero.

Otra ventaja del sobremuestreo con una línea de anchura finita es que se distribuye la intensidad total entre mas pixeles.
Ahora, tenemos el pixel en la posición de cuadricula (10,21) encendido (con nivel de intensidad 1).
Asimismo, si tenemos un despliegue de color, podemos extender el método para tomar en cuenta los colores de fondo.
Una línea particular podría cruzar varias areas de colores diferentes y podemos promediar las intensidades de los subpixeles para obtener las especificaciones de color de pixel.
Por ejemplo, si se determina que cinco subpixeles en el area de un pixel particular están dentro de las fronteras para una línea roja y que los cuatro pixeles restantes caen dentro de una area de fondo azul, podemos calcular el color para este pixel como

$$pixel_{color} = (5 \text{ rojo} + 4 \text{ azul}) / 9$$

Asignando la intensidad del pixel en proporción a la cantidad de su area cubierta suaviza el efecto de la línea, haciendo que se vea mucho mejor de lejos a pesar del hecho que se extiende el efecto sobre multiples pixeles.

La compensación de estas ventajas del sobremuestreo de una línea con anchura finita es que para identificar los pixeles interiores se requieren mas cálculos que la simple determinación de los pixeles que se encuentran a lo largo de la trayectoria de la línea.
Estos cálculos se complican también por la disposición de las fronteras de la línea en relación con la trayectoria de la misma.
Esta disposición depende de la pendiente de la línea.
Para una línea de 45°, la trayectoria de la línea se centra en el area del polígono; pero ya sea para una línea horizontal o una vertical, necesitamos que la trayectoria de línea sea una de las fronteras del polígono.
Por ejemplo, una línea horizontal que pasa a través de las coordenadas de cuadricula (10,20) se representaría como el polígono limitado por las fronteras inferior y superior de las cuadriculas para el pixel $y$ =20.
De modo similar, el polígono que representa una línea vertical que pasa por (10,20) tendría fronteras verticales limitado por las fronteras izquierda y derecha de las cuadriculas para el pixel $x$ =10.
Para las líneas con pendiente $|m| < 1$, se coloca la trayectoria matemática de la línea proporcionalmente mas cerca de la frontera inferior del polígono; y para las líneas con pendiente $|m| > 1$, se coloca la trayectoria matemática de la línea mas cerca de la frontera superior del polígono.

**4.3 Muestreo de Area Con-Peso**

A menudo, se implementan los algoritmos de sobremuestreo al dar mas peso a los subpixeles cercanos al centro del area de un pixel, puesto que esperaríamos que estos subpixeles fueran mas importantes para determinar la intensidad general de un pixel.
Se mantienen las primeras dos propiedades anteriores, pero se altera al tercera propiedad.
Se permite que las areas contribuyen de forma desigual: una pequeña area mas cercana al centro del pixel tiene mas influencia que una a mayor distancia.

Para las subdivisiones de pixel de 3 por 3 hecho hasta ahora, se podría utilizar un esquema de peso como se muestra en la siguiente figura:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 1 |

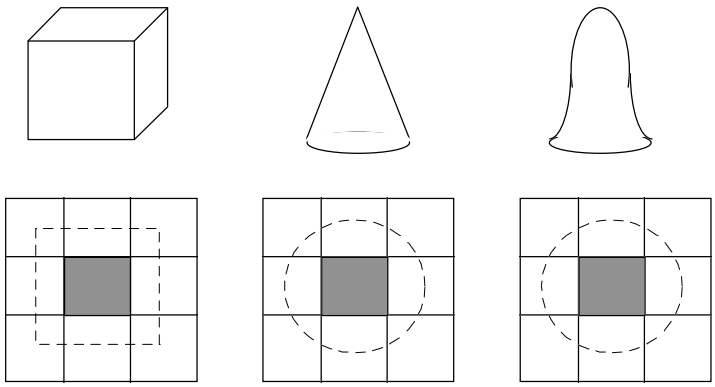
Aquí, se da al subpixel del centro un peso de cuatro veces aquel de los subpixeles de las esquinas y de dos veces del resto de los subpixeles.
Así, se promediarían las intensidades calculadas para cada cuadricula de nueve subpixeles, de modo que se pese el subpixel del centro por un factor de 1/4; que cada uno de los subpixeles de las partes superior, inferior y laterales se pese por un factor de 1/8; y que cada uno de los subpixeles de las esquinas se pese por un factor de 1/16.
En ocasiones, una matriz de valores que especifican la importancia relativa de los subpixeles se conoce como una "mascara" de pesos de subpixeles.
Se puede establecer mascaras similares para cuadriculas de subpixeles mas grandes.
Asimismo, es frecuente que se extiendan estas mascaras para incluir las contribuciones de subpixeles que pertenecen a pixeles contiguos, de manera que se puedan promediar las intensidades sobre pixeles adyacentes.

***
Realizamos un muestreo de area de un segmento de línea recta al establecer la intensidad de cada pixel proporcional al area de traslape del pixel con la línea de anchura finita.
Se puede manejar la línea como un rectángulo y la sección del área de la línea entre dos líneas de la cuadricula de pantalla verticales adyacentes (o dos líneas horizontales adyacentes) entonces es un trapezoide.
Las areas de superposición de los pixeles se calculan al determinar el porcentaje del trapezoide que se superpone en cada pixel en esa columna vertical (o renglón horizontal).
En la figura de la línea, el pixel con las coordenadas de cuadricula de pantalla (10,20) tiene alrededor del 90 por ciento cubierto con el area de la línea, de manera que se establecería su intensidad en 90 por ciento de la intensidad máxima.
De modo similar, el pixel en (10,21) se determinaría con una intensidad aproximada del 15 por ciento de la máxima.
El numero total de subpixeles adentro de las fronteras de la línea es aproximadamente igual que el area de traslape y se mejora esta estimación al utilizar cuadriculas de subpixeles mas delgadas.
Con despliegues a color, se calculan las areas de traslape de pixel con diferentes regiones de color y el color del pixel final se considera como el color promedio de las diversas areas de superposición.
****

Para retener la segunda propiedad, se debe cambiar la geometría del pixel.
En el muestreo de area sin peso, si una arista de una primitiva esta bastante cerca del borde de una cuadricula, pero no intersecta el borde, no contribuía a la intensidad del pixel.
En el nuevo enfoque, el pixel representa un area circular mas grande que la cuadricula; la primitiva intersectara esta area mayor; y por lo tanto contribuirá a la intensidad del pixel.
Esto significa que las areas asociadas con pixeles adyacentes se superpondrán.

Para explicar el origen de los adjetivos *sin-peso* y *con-peso*, se define una **función de peso** que determina la influencia sobre la intensidad de un pixel dada una area pequeña $dA$ de una primitiva, como una función de la distancia de $dA$ desde el centro del pixel.
Esta función es constante para el muestreo de area sin peso, y disminuye con el incremento de la distancia para el muestreo de area con-peso.
Esta función se puede ver como $W(x,y)$ en el plano, cuya altura sobre el plano $(x,y)$ da el peso para el area $dA$ en $(x,y)$.

Un método mas preciso para efectuar antialias de líneas es la utilización de técnicas de **filtración**.
El método es similar a aplicar una mascara de pixel pesado, pero, ahora, imagínese una *superficie de peso* continua (o *función de filtro*) que cubre el pixel.
En la siguiente figura se presentan ejemplos de funciones de filtro rectangular, cónico y gaussiano.



Filtro rectangular Filtro cónico Filtro gaussiano

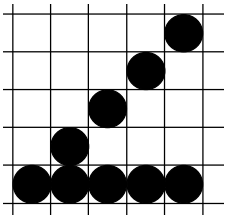
Los métodos para aplicar la función de filtro son parecidos a aplicar una mascara de peso, pero, ahora, integramos la superficie de pixel para obtener la intensidad promedio ponderada.
Con objeto de reducir los cálculos, por lo regular se utilizan tablas de búsqueda para evaluar las integrales.

**4.4 Fases de Pixeles**

También es posible aplicar antialias a los objetos de rastreo al cambiar la posición de despliegue de las areas de pixeles, para sistemas que pueden manejar posiciones de subpixel dentro de la cuadricula de pantalla.
Esta técnica, conocida como **fases de pixeles**, se aplica mediante la "microcolocación" del haz de electrones en relación con la geometría del objeto.
Los escalones a lo largo de la trayectoria de una línea o la frontera de un objeto se corrigen al mover (microcolocar) el haz de electrones en posiciones mas cercanas que se especifican por la geometría del objeto.
Los sistemas que incorporan esta técnica están diseñados de modo que se pueden cambiar las posiciones de pixeles individuales por una fracción del diámetro del pixel.
Por lo regular, se cambia el haz de electrones por 1/4, 1/2, o 3/4 del diámetro de una arista de un objeto.
Algunos sistemas también permiten ajustar el tamaño de pixeles individuales como un medio adicional para distribuir las intensidades.

**4.5 Compensación de las diferencias de intensidades de la línea**

Generar el antialias de una línea para corregir el efecto de los peldaños también compensa otro efecto del rastreo, como se muestra en la siguiente figura:

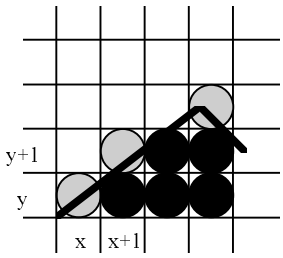


Ambas líneas están trazadas con el mismo numero de pixeles, pero la línea diagonal es mas larga que la horizontal por un factor de $\sqrt{2}$.
El efecto visual de esto es que la línea diagonal parece menos brillante que la línea horizontal, por que la diagonal se despliega con una intensidad menor por unidad de longitud.
Se podría adaptar un algoritmo para el trazo de líneas para compensar este efecto al ajustar la intensidad de cada línea de acuerdo a su pendiente.
Las líneas horizontales y verticales se desplegarían con la intensidad mas baja, en tanto que a las líneas de 45° se asignaría la mayor intensidad.
Pero si se aplican las técnicas de antialias en un despliegue, las intensidades se compensan en forma automática.
Cuando se toma en cuenta la anchura finita de las líneas, se ajustan las intensidades de pixel de manera que las líneas desplieguen una intensidad proporcional a su altura.

**4.6 Antialias de frontera de area**

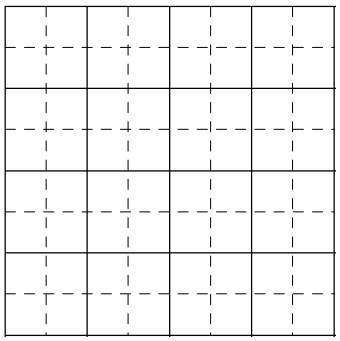
Los conceptos de antialias pueden aplicarse también a las fronteras de areas para eliminar su aspecto escalonado.
Se puede incorporar estos procedimientos en un algoritmo de línea de rastreo para corregir el contorno de área conforme se genera el área.

Es posible corregir fronteras de área al ajustar las posiciones de pixel de frontera de modo que se localicen a lo largo de la línea que define una frontera de área.
Otros métodos ajustan cada intensidad de pixel en una posición de la frontera de acuerdo con el porcentaje del área de pixel que esta adentro de la frontera.
En la siguiente figura, el pixel en la posición ($x$,$y$) tiene alrededor de la mitad de su área adentro de la frontera del polígono.

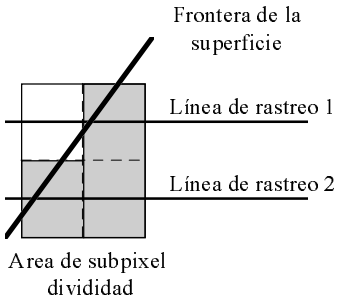



Por lo tanto, se ajustaría la intensidad en esa posición a la mitad de su valor asignado.
En la siguiente posición ($x$+1,$y$+1) a lo largo de la frontera, se ajusta la intensidad alrededor de un tercio del valor asignado para ese punto.
Se aplican ajustes similares para los otros valores de intensidad alrededor de la frontera con base en el porcentaje de la cobertura del área de pixel.

Es posible aplicar los métodos de sobremuestreo al subdividir el área total y determinar el numero de subpixeles adentro de la frontera del área.
La siguiente figura ilustra una división de un pixel en cuatro subáreas.



La cuadricula original de pixeles de 4 por 4 se convierte en una cuadricula de 8 por 8 y ahora, en lugar de cuatro, procesamos ocho líneas de rastreo a lo largo de la cuadricula.
La siguiente figura ilustra una de las áreas del pixel en esta cuadricula que se traslapa con la frontera de un objeto.



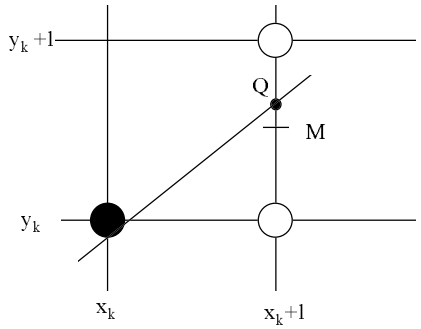

A lo largo de las dos líneas de rastreo determinamos que tres de las áreas de subpixel están adentro de la frontera. De esta manera, establecemos la intensidad del pixel en 75 por ciento de su valor máximo.

Otro método para determinar el porcentaje de área del pixel adentro de la frontera, desarrollado por Pitteway y Watkinson, se basa en el algoritmo de la línea de punto medio.
Este algoritmo selecciona el siguiente pixel a lo largo de una línea al determinar cual de los dos pixeles esta mas cerca de la línea mediante la prueba de la localización de la posición media entre dos pixeles.
Al igual que en el algoritmo de Bresenham, establecemos un parámetro de decisión $p$ cuyo signo nos indica cual de los dos siguientes pixeles candidatos esta mas cerca de la línea.
Al modificar un poco la forma de $p$, obtenemos una cantidad que también da el porcentaje del área de pixel actual que esta cubierto por un objeto.

Primero consideramos el método para una línea con pendiente $m$ en el rango de 0 a 1,

$$y = mx + b$$

En la siguiente figura se presenta la trayectoria de una línea recta en una cuadricula de pixel.




Si suponemos que se trazo el pixel en la posición $(x_k,y_k)$, el siguiente pixel mas cercano a la línea en $x = x_k + 1$ es ya sea el pixel en $y_k$ o aquel en $y_k + 1$.
Podemos determinar que pixel esta mas cerca con el calculo

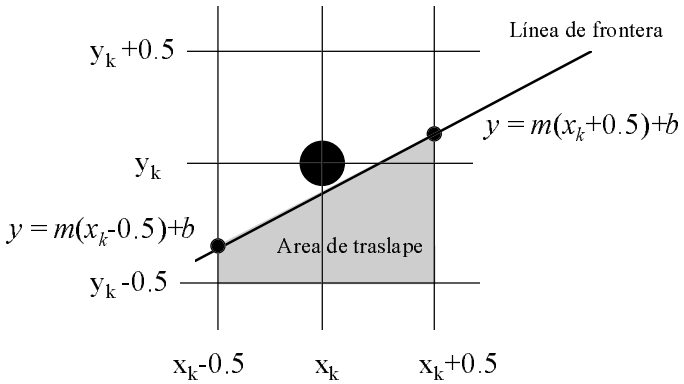
$$y - y_{medio} = [m(x_k + 1) + b] - (y_k + 0.5)$$

Esta ecuación da la distancia vertical desde la coordenada actual de $y$ en la línea hasta el punto central entre los pixeles en las posiciones $y_k$ y $y_k + 1$.
Si el calculo de esta diferencia es negativo, el pixel en $y_k$ esta mas cerca de la línea.
Si la diferencia es positiva, el pixel en $y_k + 1$ esta mas cerca.
Podemos ajustar este calculo de manera que produzca un numero positivo en el rango 0 a 1 al sumar la cantidad $1 - m$:

$$p = [m(x_k + 1) + b] - (y_k + 0.5) + (1 - m)$$

Ahora el pixel en $y_k$ esta mas cerca si $p < 1-m$ y el pixel $y_k + 1$ esta mas cerca si $p > 1-m$.

El parámetro $p$ también mide el porcentaje del pixel actual que se traslapa con el área.
Para el pixel en $(x_k,y_k)$ en la siguiente figura:




La parte interior del pixel tiene un área que se puede calcular como

$$\begin{aligned}\text{área} &= (y_{k+0.5} - y_{k-0.5})/2 + (y_{k-0.5} - (y_k - 0.5)) \\ &= [(m(x_k + 0.5) + b) - (m(x_k - 0.5) + b)]/2 + [(m(x_k - 0.5) + b) - (y_k - 0.5)] \\ &= 0.5 + (m(x_k - 0.5) + b) - (y_k - 0.5) \\ \text{área} &= mx_k + b - y_k + 0.5\end{aligned}$$

Esta expresión para el área de traslape del pixel $(x_k,y_k)$ es la misma que para el parámetro $p$ en la ecuación anterior de $p$.

Por lo tanto, al evaluar *p* para determinar la posición del siguiente pixel a lo largo de la frontera del polígono, determinamos también el porcentaje de cobertura del área para el pixel actual.

Podemos generalizar este algoritmo para ajustar líneas con pendientes negativas y líneas con pendientes mayores que 1.
De esta manera, se podría incorporar este calculo para el parámetro *p* en un algoritmo de línea de punto medio para localizar posiciones de pixel y una arista de objeto, así como para ajustar en forma repetitiva las intensidades de pixel a lo largo de las líneas de la frontera.
Asimismo, podemos hacer referencia a las coordenadas de pixel en sus coordenadas de la parte inferior izquierda y mantener las proporciones de área.

En los vértices del polígono y para polígonos muy delgados (slivers), tenemos mas de una arista de frontera que pasa a través del área del pixel.
En estos casos, necesitamos modificar el algoritmo de Pitteway-Watkinson al procesar todas las aristas que pasan por un pixel y determinar el área interior correcta.

Las técnicas de filtración antes analizadas para los antialias de líneas se pueden aplicar también en las aristas de área.
De la misma forma, es posible aplicar los diversos métodos de creación de antialias en áreas de polígonos o en regiones con fronteras curvas.
Se emplean ecuaciones de frontera para estimar el traslape de áreas de las regiones del pixel con el área que se debe desplegar.
Y se utilizan técnicas de coherencia a lo largo de las líneas de rastreo y entre estas para simplificar los cálculos.