5. Transformaciones geométricas bidimensionales

Los cambios de orientación, tamaño, y forma se realizan con transformaciones geométricas que alteran la descripción de las coordenadas de los objetos.
Las transformaciones geométricas básicas son traslación, rotación y escala.
Otras transformaciones que se aplican con frecuencia en objetos incluyen la reflexión y el recorte.

5.1 Transformaciones Básicas

5.1.1 Traslación

Se aplica una **traslación** en un objeto para cambiar su posición a lo largo de la trayectoria de una línea recta de una dirección de coordenadas a otra.
Convertimos un punto bidimensional al agregar las distancias de traslación d_x y d_y a la posición de coordenadas original $P(x,y)$ para mover el punto a una nueva posición $P'(x',y')$:

(5.1)
$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$

El par de distancia de traslación (d_x, d_y) se llama **vector de traslación** o **vector de cambio**.

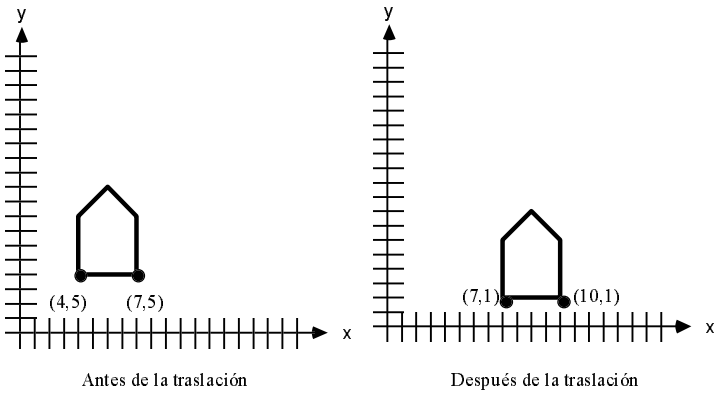
Se puede expresar las ecuaciones de traslación como una sola ecuación matricial al utilizar vectores de columna para representar las posiciones de coordenadas y el vector de traslación:

(5.1)
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Esto nos permite expresar las dos ecuaciones de traslación bidimensional en la forma matricial:

(5.3)
$$P' = P + T$$

Se trasladaría un objeto al aplicar las ecuaciones anteriores a cada punto del objeto.
Como cada línea en un objeto esta hecho de un numero infinito de puntos, sin embargo, este proceso tomaría un tiempo infinitamente largo.
Por suerte, se puede trasladar todos los puntos en una línea trasladando solamente los extremos de la línea y dibujando la nueva línea entre los extremos trasladados; esta observación también se aplica a la escala y rotación.
La siguiente figura muestra los efectos de trasladar una figura por (3,-4):



5.1.2 Escala

Los puntos pueden ser **escalados** por s_x, sobre el eje x y por s_y, sobre el eje y en nuevos puntos por medio de las multiplicaciones

(5.4) $$x' = s_x\, x$$
$$y' = s_y\, y$$

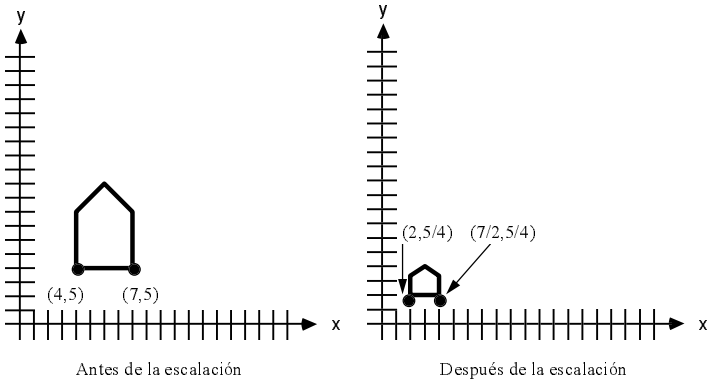
De forma matricial esto es

(5.5) $$P' = S \cdot P$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

La siguiente figura se escala por 1/2 en x y 1/4 en y.



Nótese que la escala es sobre el origen: La figura es mas pequeña y mas cercana al origen.
Si el factor de escala fuese mayor a 1, la casa seria mas grande y estaría mas lejos del origen.
Técnicas para escala alrededor de algún punto diferente del origen se vera mas adelante.
Las proporciones de la figura también han cambiado: Se ha utilizado una **escala diferencial**, donde $s_x \neq s_y$.
Con una **escala uniforme**, donde $s_x = s_y$, no se afectan las proporciones.

5.1.3 Rotación

Los puntos pueden **rotarse** por un ángulo θ sobre el origen.
Una rotación se define matematicamente por

(5.6) $$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

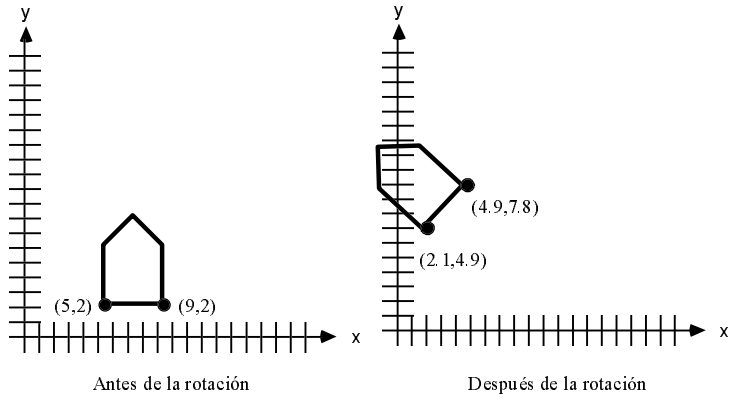
En forma matricial

(5.7) $$P' = R \cdot P$$

donde R es la matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

La siguiente figura muestra una rotación de 45°.



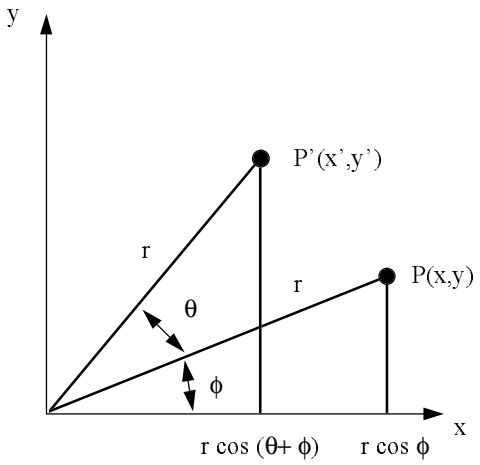
Como con la escala, la rotación es sobre el origen: rotación según un punto arbitrario se discute mas adelante.

Angulos positivos se miden **contra el sentido del reloj** de x a y.
Angulos negativos (sentido del reloj), se pueden usar las identidades

$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

para modificar las ecuaciones anteriores.

La ecuación para P' se deriva facilmente de la siguiente figura, donde una rotación por θ transforma $P(x,y)$ en $P'(x',y')$.



Como la rotación es sobre el origen, la distancia del origen a *P* y a *P*', etiquetada *r* en la figura, son iguales. Por simple trigonometría encontramos que

(5.8) $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

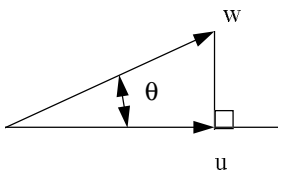
y

(5.9) $x' = r\cos(\phi + \theta) = r\cos\phi\ \cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$
$y' = r\sin(\phi + \theta) = r\cos\phi\ \sin\theta + r\sin\phi\cos\theta$

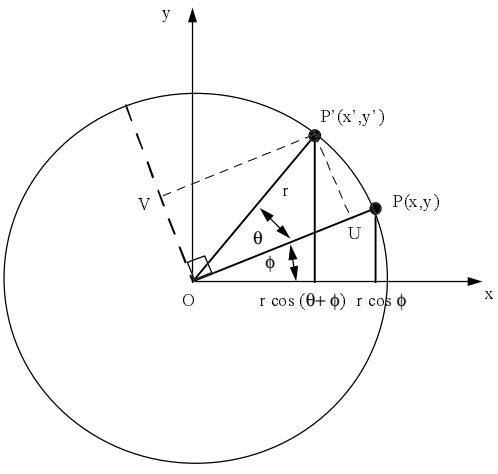
Sustituyendo (5.8) en (5.9) nos da la ecuación (5.6).

Esto se demuestra dado que para la siguiente figura

$|u| = |w|\ \cos\theta$



Y considerando la siguiente figura



La siguiente relación vectorial

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UP'}$$

es equivalente a la igualdad sobre el eje x

$$r\cos(\theta + \phi) = r\cos\theta\cos\phi + r\sin\theta\cos(\phi+90°)$$
$$= r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi$$

Para calcular la ecuación en termino de sin, tenemos

$$r\sin(\theta + \phi) = r\cos(90° - (\theta + \phi)) = r\cos((90° - \theta) - \phi)$$
$$= r\cos\phi\cos(90° - \theta) + r\sin\phi\sin(90° - \theta)$$
$$= r\cos\phi\ \sin\theta + r\sin\phi\cos\theta$$

Algunos libros de texto utilizan convenciones de pre-multiplicar matrices por dos vectores de fila, en lugar de post-multiplicar por vectores de columna.
Las matrices deben ser transpuestas para ir de una convención a la otra, al igual que las columnas de fila y columna están transpuestas:

$$P'^{T} = (M \cdot P)^{T} = P^{T} \cdot M^{T}$$

donde

$$P^{T} = [x\ \ y],\ \ P'^{T} = [x'\ y']$$

5.2 Coordenadas Homogéneas para Transformaciones Bidimensionales

Las representaciones matriciales para traslación, escala, y rotación son:

(5.3) $$P' = P + T$$

(5.5) $$P' = S \cdot P$$

(5.7) $$P' = R \cdot P$$

Por desgracia, la traslación se trata de forma diferente a la escala y rotación.
Nos gustaría poder tratar las tres transformaciones de forma consistente, para poder combinarlas facilmente.

Si los puntos se expresan en **coordenadas homogéneas**, las tres transformaciones se pueden tratar como multiplicaciones.
Las coordenadas homogéneas fueron desarrolladas por primera vez en la geometría por Maxwell (1946; 1951) y se han aplicado subsecuentemente en las gráficas (Roberts 1965; Blinn 1977; 1978).
Numerosos paquetes de subrutinas gráficas y procesadores de despliegue trabajan con coordinadas y transformaciones homogéneas.

En las coordenadas homogéneas se agrega una tercera coordenada al punto.
En lugar de representarse con una par de números (x,y), cada punto se representa por un tripleta (x,y,W).
Al mismo tiempo, se dice que dos conjuntos de coordenadas homogéneas (x,y,W) y (x',y',W') representan el mismo punto solo y solo si una es un múltiplo del otro.
Por ejemplo, (2,3,6) y (4,6,12) son el mismo punto representado por diferentes tripletas de coordenadas.
O sea, cada punto tienen muchas representaciones diferentes de coordenadas homogéneas.
También, por lo menos una de las coordenadas homogéneas debe ser diferente a cero: (0,0,0) no se permite.
Si la coordenada W no es cero, se puede dividir por ella: (x,y,W) representa el mismo punto que $(x/W, y/W, 1)$.

Cuando W no es cero, normalmente se hace esta división, y los números x/W y y/W se llaman las coordenadas Cartesianas del punto homogéneo.
Los puntos con $W=0$ se llaman puntos en la infinidad, y no se utilizaran para nuestras computaciones.

Tripletas de coordenadas tipicamente representan puntos en 3D, pero aquí se utilizan para representar puntos en 2D.
La conexión es esta: Si tomamos todas las tripletas representando el mismo punto, o sea todas las tripletas de forma (tx, ty, tW), con $t\neq 0$, obtenemos una línea en 3D.
Por lo tanto, cada *punto* homogéneo representa una *línea* en 3D.
Si se **homogeniza** el punto (divide por W), obtenemos un punto de forma (x, y, 1).
Por lo tanto, los puntos homogenizados forman un plano definido por las ecuaciones $W=1$ en el espacio (x,y,W).
Los puntos en el infinito no se representan en este plano.

5.2.1 Traslación

Como los puntos son ahora vectores de columna de tres elementos, las matrices de transformación, las cuales multiplican un vector de punto para producir otro vector de punto, deben ser de 3×3.
En la forma matricial de 3×3 para coordenadas homogéneas, las ecuaciones de traslación (5.1) son:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

La ecuación (5.10) se expresaría de forma diferente por

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P \tag{5.11}$$

donde

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Que ocurriría si un punto P se traslada por $T(d_{x1}, d_{y1})$ a P' y luego se traslada por $T(d_{x2}, d_{y2})$ a P''.
El resultado seria una traslación neta de $T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$.
Esto se da con

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P \tag{5.13}$$
$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P' \tag{5.14}$$

Lo que resulta en

$$\begin{aligned} P'' &= T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot (T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P) \\ &= (T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})) \cdot P \end{aligned} \tag{5.15}$$

Siendo la matriz producto $T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} + d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y2} + d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

La traslación neta es realmente $T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$.
El producto matricial se refiere como **composición** o **concatenación** de $T(d_{x2}, d_{y2})$ y $T(d_{x1}, d_{y1})$.

5.2.2 Escala

De forma similar, las ecuaciones de escala (5.4) se representan en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Definiendo

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.18}$$

y tenemos

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P \tag{5.19}$$

Al igual que traslaciones sucesivas son aditivas, escala sucesiva debe ser multiplicativa.
Dado

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P \tag{5.20}$$
$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P' \tag{5.21}$$

Lo que resulta en

$$\begin{aligned} P'' &= S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot (S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P) \\ &= (S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})) \cdot P \end{aligned} \tag{5.22}$$

Siendo la matriz producto $S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})$

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x2} \cdot s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} \cdot s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Y se ve que la escala es realmente multiplicativa.

5.2.3 Rotación

Las ecuaciones de rotación (5.6) pueden representarse como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

con

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

tenemos

$$P' = R(\theta) \cdot P \tag{5.26}$$

5.3 Composición de Transformaciones en 2D

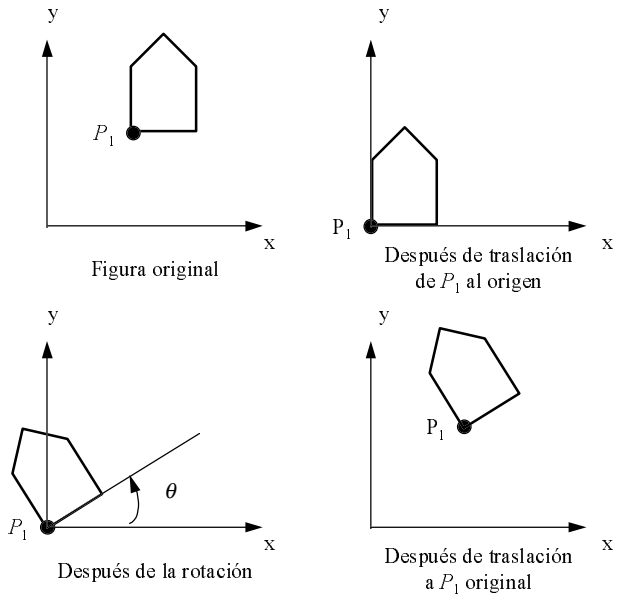
Se pueden combinar matrices R, S, y T fundamentales para producir resultados deseados generales.
El propósito básico de componer transformaciones es ganar en rendimiento al aplicar una sola transformación compuesta a un punto, en lugar de aplicarle una serie de transformaciones, una tras otra.

5.3.1 Rotación de punto de pivote general

Consideremos la rotación de un objeto en relación a algún punto arbitrario P_1.
Como sabemos como rotar en relación al origen, convertimos nuestro problema original (difícil) en tres problemas separadas (fáciles).
por lo tanto, para rotar en relación a un punto P_1, necesitamos una secuencia de tres transformaciones fundamentales:

1. Trasladar tal P_1 al origen.
2. Rotar.
3. Trasladar de tal forma que el punto en el origen regresa a P_1.

Esta secuencia se ilustra en la siguiente figura, donde nuestra figura se rota en relación a $P_1(x_1,y_1)$.



La primera traslación es por $(-x_1,-y_1)$, mientras que la ultima traslación es por el inverso (x_1,y_1). El resultado es un poco diferente de haber aplicado solamente la rotación.

La transformación neta es

$$T(x_1,y_1)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_1,-y_1)=\begin{bmatrix}1&0&x_1\\0&1&y_1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-x_1\\0&1&-y_1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&x_1(1-\cos\theta)+y_1\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta&y_1(1-\cos\theta)-x_1\sin\theta\\0&0&1\end{bmatrix}$$

5.3.2 Escala de punto fijo general

Un enfoque similar se utiliza para escalar un objeto en relación a un punto arbitrario P_1.

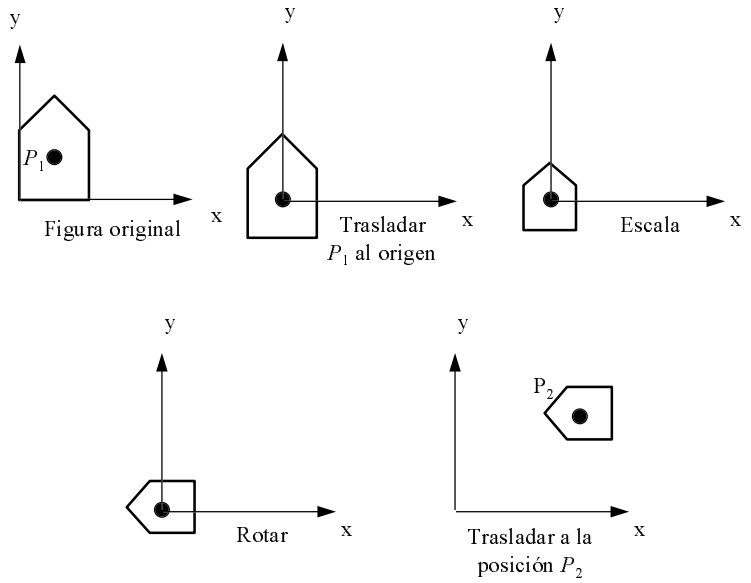
1. Se traslada tal punto P_1 al origen.
2. Se escala.
3. Se traslada de regreso a P_1.

En este caso la transformación neta es

$$T(x_1,y_1)\cdot S(s_x,s_y)\cdot T(-x_1,-y_1)=\begin{bmatrix}1&0&x_1\\0&1&y_1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x&0&0\\0&s_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-x_1\\0&1&-y_1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que quisiéramos escalar, rotar, y posicionar la figura como se muestra a continuación, con P_1 como centro de rotación y escala.

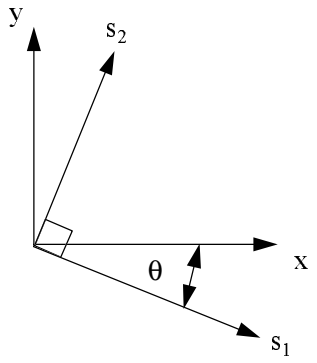


La secuencia es trasladar P_1 al origen, ejecutar la escala y rotación, y luego trasladar del origen a la nueva posición P_2, donde la figura se ubicara.

5.3.3 Direcciones de Escala general

Los parámetros s_x y s_y escalan objetos a lo largo de las direcciones de x y de y.
Podemos escalar un objeto en otras direcciones al girar el objeto para alinear las direcciones de escala deseadas con los ejes de coordenadas antes de aplicar la transformación de escala.

Supongamos que queremos aplicar factores de escala con valores que se especifican con los parámetros s_1 y s_2 en las direcciones que se presentan en la siguiente figura.



Para llevar a cabo la escala sin cambiar la orientación del objeto, se realizan los siguientes pasos:
1. Rotación de modo que las direcciones de s_1 y s_2 coincidan con los ejes de x y y, respectivamente.
2. Escala.
3. Rotación opuesta para regresar los puntos a sus orientaciones originales.

La matriz compuesta resultante del producto de estas tres transformaciones es:

$$R^{-1}(\theta)\cdot S(s_1,s_2)\cdot R(\theta)\cdot = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}s_1 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

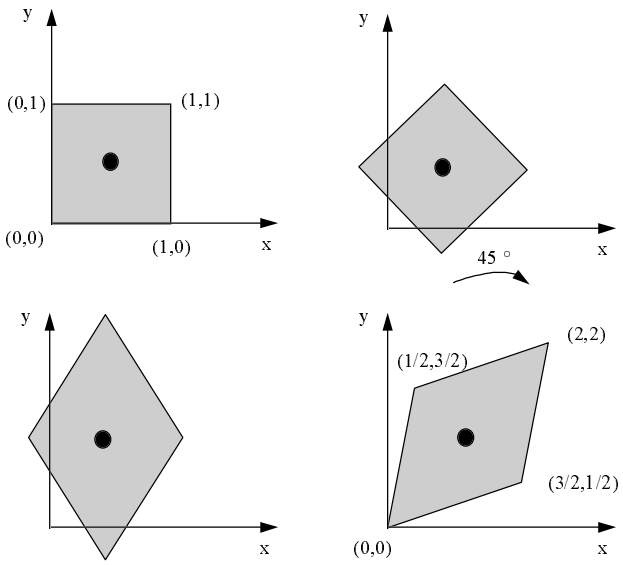
$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}s_1\cos^2\theta + s_2\sin^2\theta & (s_2 - s_1)\cos\theta\sin\theta & 0\\ (s_2 - s_1)\cos\theta\sin\theta & s_1\sin^2\theta + s_2\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

donde la inversa de la matriz de rotación es:

$$R^{-1}(\theta)\cdot = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Como ejemplo, convertiremos un cuadrado unitario en un paralelogramo al extenderlo a lo largo de la diagonal (0,0) a (1,1) como se muestra en la siguiente figura.



Giramos la diagonal sobre el eje de las *y* y duplicamos su longitud con los parámetros de transformación $\theta = 45°$, $s_1 = 1$ y $s_2 = 2$.

Dada la ecuación

$$R^{-1}(\theta)\cdot S(s_1,s_2)\cdot R(\theta)\cdot = \begin{bmatrix} s_1\cos^2\theta + s_2\sin^2\theta & (s_2 - s_1)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ (s_2 - s_1)\cos\theta\sin\theta & s_1\sin^2\theta + s_2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$R^{-1}(45)\cdot S(1,2)\cdot R(45)\cdot = \begin{bmatrix} 1\cos^2 45 + 2\sin^2 45 & (2-1)\cos 45\sin 45 & 0 \\ (2-1)\cos 45\sin 45 & 1\sin^2 45 + 2\cos^2 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y los puntos de los vértices se obtienen multiplicando los originales por la matriz de transformación.

Se podría extender la ecuación anterior, agregándole una transformación de traslación para la especificación de una posición de escala fija.

5.3.4 Propiedades de Concatenación

Una estructura de datos que guarde información de transformaciones puede contener los factores de escala(s), ángulo de rotación, y cantidades de traslación, y el orden en el cual las transformación deben aplicarse, o puede implemente guardar la matriz de transformación compuesta, por ejemplo:

$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$

5.3.4.1 Asociatividad

La multiplicación de matrices es asociativa.
Para tres matrices, **A**, **B**, y **C**, el producto matricial **A** · **B** · **C** se puede llevar a cabo al multiplicar primero **A** por **B**, o multiplicar primero **B** por **C**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

Por lo tanto, podemos evaluar los productos matriciales al utilizar una agrupación asociativa ya sea de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

5.3.4.2 Conmutación

Si M_1 y M_2 representan cada cual una traslación, escala, o rotación fundamental, cuando es
$M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$?
O sea, cuando se conmutan M_1 y M_2 ?
En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa.
Sin embargo, es fácil de demostrar, que en los casos especiales siguientes, la conmutabilidad se mantiene:

M_1	M_2
Traslación	Traslación
Escala	Escala
Rotación	Rotación
Escala (con $s_x = s_y$)	Rotación

En estos casos, no tenemos que preocuparnos sobre el *orden* de composición de matriz.

5.3.5 Transformaciones de composición general y de eficiencia computacional

Una matriz de transformación de composición de traslación, escala, y rotación, tiene la siguiente forma general

$$\begin{bmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} & trs_x \\ rs_{yx} & rs_{yy} & trs_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Los cuatro elementos rs_{ij} son los términos multiplicativos de rotación-escala en la transformación que implican solo ángulos de rotación y factores de escala.
Los elementos trs_{ij} son los términos de traslación que contienen combinaciones de distancias de traslación, coordenadas de punto pivote y de punto fijo, así como de ángulos de rotación y parámetros de escala.

Por ejemplo, si se debe escalar y girar un objeto con respecto de las coordenadas de su centroide (x_c,y_c) y después trasladarlo, los valores para los elementos de la matriz de transformación compuesta son:

$$T(t_x,t_y)\cdot R(x_c,y_c,\theta)\cdot S(x_c,y_c,s_x,s_y)=\begin{bmatrix} s_x\cos\theta & -s_y\sin\theta & x_c(1-s_x\cos\theta)+y_c s_y\sin\theta+t_x \\ s_x\sin\theta & s_y\cos\theta & y_c(1-s_y\cos\theta)-x_c s_x\sin\theta+t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aunque la ecuación de la matriz (5.37) requiere nueve multiplicaciones y seis adiciones, los cálculos explícitos para las coordenadas transformadas son:

(5.39)
$$x' = x\cdot rs_{xx} + y\cdot rs_{xy} + trs_x$$
$$y' = y\cdot rs_{yx} + y\cdot rs_{yy} + trs_y$$

Así, en realidad solo necesitamos efectuar cuatro multiplicaciones y cuatro adiciones para transformar las posiciones de coordenadas.
Ese es el numero máximo de cálculos que se requieren para cualquier secuencia de transformación, una vez que se han concatenado las matrices individuales y evaluado los elementos de la matriz compuesta.
Sin concatenación, se aplicarían las transformaciones individuales una a la vez y se podrían reducir en forma considerable el numero de cálculos.
De esta manera, una implementación eficiente de las operaciones de transformación consiste en formular matrices de transformación, concatenar cualquier secuencia de transformación y calcular las coordenadas transformadas al utilizar la ecuación (5.39).
En sistemas paralelos, las multiplicaciones matriciales directas con la matriz de transformación compuesta de la ecuación (5.37) pueden ser igual de eficientes.

Se puede expresar una **matriz de transformación de cuerpo rígido** general, que solo implica traslaciones y rotaciones como

(5.40)
$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los cuatro elementos s_{ij} son los términos multiplicativos de rotación en la transformación, y los elementos tr_{ij} son los términos de traslación.
En ocasiones, un cambio de cuerpo rígido en la posición de coordenadas se denomina transformación de **movimiento rígido**.
Todos los ángulos y distancias entre las posiciones de coordenadas permanecen sin cambios al realizar la transformación.
Además, la matriz (5.40) tiene la propiedad de que su submatriz superior izquierda de 2x2 es una matriz ortogonal.
Esto significa que si consideramos cada renglón de la submatriz como un vector, se puede demostrar que estos dos vectores (r_{xx}, r_{xy}) y (r_{yx}, r_{yy}) tiene las siguiente propiedades:

1. Cada uno es un vector unidad (su magnitud es 1),
   $r^2_{xx} + r^2_{xy} = r^2_{yx} + r^2_{yy} = 1$
2. Cada uno es perpendicular al otro (su producto punto es cero),
   $r_{xx}\, r_{yx} + r_{xy}\, r_{yy} = 0$
3. El primer y segundo vector se rotarán por $R(\theta)$ para quedar en los ejes positivos de x y y, respectivamente (en la presencia de las condiciones 1 y 2, esta propiedad es equivalente a la submatriz teniendo un determinante de 1) $(r_{xx}r_{yy} - r_{xy}r_{yx} = 1)$.

El determinante es el producto de las dos diagonales, restando la segunda, multiplicación de la primera, o sea:

$= \cos\theta \cos\theta - (-\sin\theta)\sin\theta$
$= \cos\theta \cos\theta + \sin\theta \sin\theta$
$= 1$ ($|M| = 1$)

Por lo tanto, si estos vectores unitarios se transforman por la submatriz de rotación (r_{xx}, r_{xy}) se convierte en un vector unitario a lo largo del eje de *x*, y (r_{yx}, r_{yy}) se transforma en un vector unitario a lo largo del eje *y* del sistema de coordenadas.
Las dos direcciones son aquellas donde se rotan los vectores por los ejes positivos de *x* y *y*.

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & 0 \\ r_{yx} & r_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{xx} \\ r_{xy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & 0 \\ r_{yx} & r_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

Las primeras dos propiedades también son ciertas de las columnas de la submatriz de 2x2.

Una matriz de transformación donde la submatriz superior de 2x2 es ortogonal, preserva ángulos y longitudes. O sea, un cuadrado de una unidad se mantiene como un cuadrado de una unidad, y no se vuelve un rombo con lados de una unidad, ni un cuadrado con lados diferentes a una unidad.
Tales transformación también se conocen como transformación de **cuerpo rígido**, ya que el cuerpo u objeto siendo transformado no se distorsiona de ninguna manera.
Una secuencia arbitraria de matrices de rotación y traslación crea una matriz de esta forma.

Ejemplo, la siguiente transformación de cuerpo rígido primero gira un objeto a través de un ángulo θ con respecto al punto de pivote (x_r,y_r) y luego lo traslada:

$$T(t_x, t_y) \cdot R(x_r, y_r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta) + y_r \sin\theta + t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) - x_r \sin\theta + t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

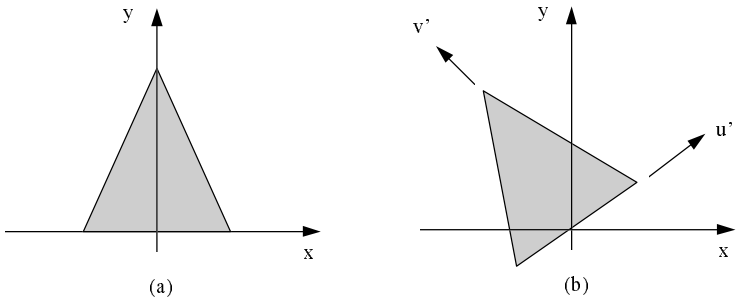
Aquí, los vectores unitarios ortogonales en la submatriz superior izquierda de 2x2 son
($\cos\theta$, $-\sin\theta$) y ($\sin\theta$, $\cos\theta$), y

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

De modo similar, el vector unitario ($\sin\theta$, $\cos\theta$) se convierte por la matriz de transformación de la ecuación (5.46) en el vector unitario en la dirección de *y*.

La propiedad ortogonal de las matrices de rotación es útil para realizar una matriz de rotación cuando conocemos la orientación final de un objeto en lugar de la cantidad de rotación angular necesaria para colocar el objeto en esa posición.

Las direcciones para la orientación deseada de un objeto se podrían determinar mediante la alineación de ciertos objetos en una escena o mediante posiciones seleccionadas en la escena.
La siguiente figura ilustra un objeto que se debe alinear con los vectores de dirección de unidad ***u'*** y ***v'***.



Al suponer que la orientación original del objeto, como se muestra en (a), esta alineada con los ejes de las coordenadas, realizamos la transformación deseada al asignar los elementos de ***u'*** al primer renglón de la matriz de rotación y los elementos de ***v'*** al segundo renglón.
Este puede ser un método conveniente para obtener la matriz de transformación para la rotación de un sistema de coordenadas local (u "objeto") cuando conocemos los vectores de orientación finales.
Una transformación similar es la conversión de descripciones de objetos de un sistema de coordenadas a otro.

Dado que los cálculos de la rotación requieren evaluaciones trigonométricas y varias multiplicaciones para cada punto que se transforma, la eficiencia computacional puede tornarse en una consideración importante en las transformaciones de rotación.
En animaciones y otras aplicaciones que implican muchas transformaciones repetidas y ángulos de rotación pequeños, podemos utilizar aproximaciones y cálculos repetitivos para reducir los cálculos en las ecuaciones de transformación compuesta.
Cuando el ángulo de rotación es pequeño, se pueden sustituir las funciones trigonométricas con valores de aproximación con base en los primeros términos de sus expansiones de series de potencia.
Para ángulos bastante pequeños (de menos de 10º), $\cos\theta$ es alrededor de 1 y $\sin\theta$ tiene un valor muy cercano al valor de θ en radiantes.
Por ejemplo, si giramos en pasos angulares pequeños alrededor del origen, podemos establecer $\cos\theta$ como 1 y reducir los cálculos de la transformación en cada paso a dos multiplicaciones y dos adiciones para cada conjunto de coordenadas que se debe girar:

(5.47)
$$x' = x - y \sin\theta$$
$$y' = y + x \sin\theta$$

donde se evalúa $\sin\theta$ una vez para todos los pasos, si se supone que el ángulo de rotación no cambia.
El error que implica esta aproximación en cada paso disminuye conforme el ángulo de rotación es menor.
Pero incluso con ángulos de rotación pequeños, el error acumulado sobre muchos pasos puede tornarse muy grande.
Podemos encontrar el error acumulado al estimar el error en x' y y' en cada paso y volver a especificar las posiciones del objeto cuando la acumulación del error es muy grande.

Las transformaciones compuestas a menudo implican cálculos de la matriz inversa.
Por ejemplo, las secuencias de transformación, para las direcciones de escala general y para las reflexiones y recortes, se pueden describir con componentes de rotación inversa.
Se pueden generar con procedimientos simples las representaciones de matriz inversa para las transformaciones geométricas básicas.
Se obtiene una matriz de traslación inversa al realizar una transposición de matriz (o cambiar el signo de los términos del seno).
Estas operaciones son muchos mas sencillas que los cálculos de la matriz inversa.

5.4 Otras Transformaciones

Las transformaciones básicas, como la traslación, rotación y escala, se incluyen en la mayor parte de los paquetes de gráficas.
Algunos paquetes proporcionan algunas transformaciones adicionales que son útiles para ciertas aplicaciones.
Dos de estas transformaciones son la reflexión y el recorte.

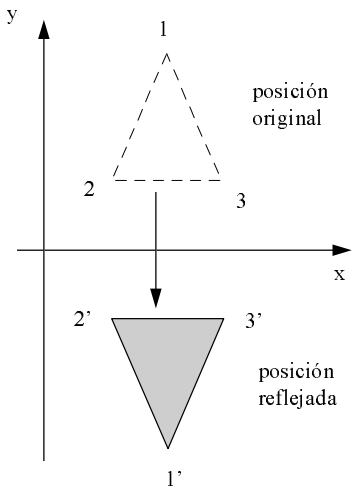
5.4.1 Reflexión

Una **reflexión** es una transformación que produce una imagen de espejo de un objeto.
La imagen de espejo para una reflexión bidimensional se genera en relación con un **eje de reflexión** al girar el objeto en 180º alrededor del eje de reflexión.
Podemos elegir un eje de reflexión en el plano de *xy* o perpendicular al plano de *xy*.
Cuando el eje de reflexión es una línea en el plano de *xy*, la trayectoria de rotación alrededor de este eje es un plano perpendicular al plano de *xy*.
Para los ejes de reflexión que son perpendiculares al plano de *xy*, la trayectoria de rotación esta en el plano de *xy*.
Los siguientes son ejemplos de algunas reflexiones comunes.

La reflexión alrededor de la línea $y = 0$, el eje de x, se logra con la matriz de transformación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

Esta transformación conserva iguales los valores de *x*, pero "gira" los valores de *y* de las posiciones de las coordenadas.
La orientación que resulta de una objeto después de que la reflexión alrededor del eje de *x* se muestra en la siguiente figura.

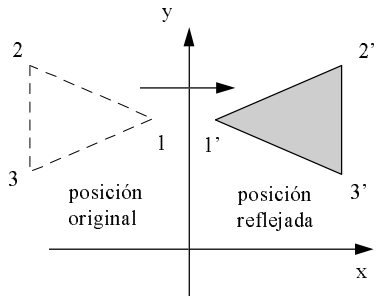


Para imaginar la trayectoria de transformación de rotación para esta reflexión, podemos pensar en el objeto plano moviéndose fuera del plano *xy* y girando en 180º a través de un espacio tridimensional alrededor del eje de *x* y de regreso al plano *xy* en el otro lado del eje de *x*.

Una reflexión alrededor de la línea $x = 0$, el eje de y, se logra con la matriz de transformación

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Esta transformación conserva iguales los valores de *x*, pero "gira" los valores de *y* de las posiciones de las coordenadas.
La orientación que resulta de una objeto después de que la reflexión alrededor del eje de *x* se muestra en la siguiente figura.

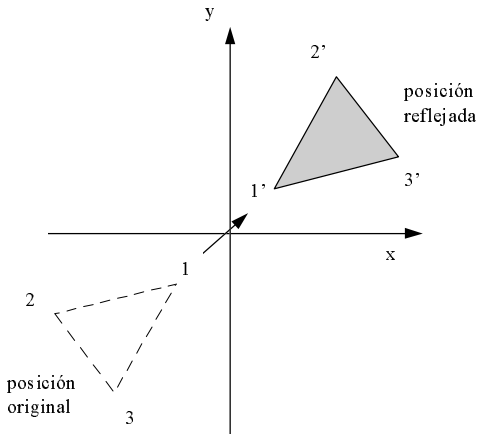


En este caso, la rotación equivalente en 180º a través del espacio tridimensional alrededor del eje de *y*.

Giramos tanto las coordenadas de *x* como de *y* de un punto mediante la reflexión con respecto de un eje que es perpendicular al plano de *xy* y que pasa a través del origen de las coordenadas.
Esta transformación, que se conoce como una reflexión en relación al origen de las coordenadas, tiene la representación matricial:

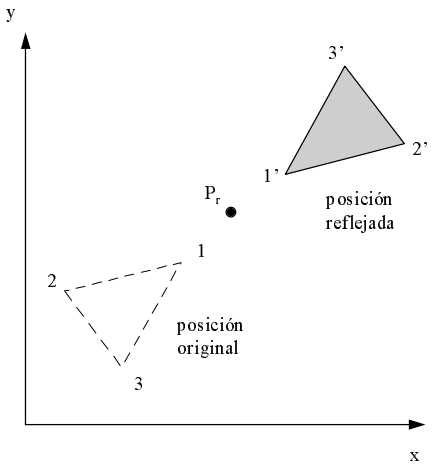
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Un ejemplo de reflexión alrededor del origen se muestra en la siguiente figura:



La matriz de reflexión (5.50) es la matriz de rotación $R(\theta)$ con $\theta = 180º$.
Simplemente giramos el objeto en el plano de *xy* media vuelta alrededor del origen.

La reflexión (5.50= se puede generalizar para cualquier punto de reflexión en el plano *xy*.

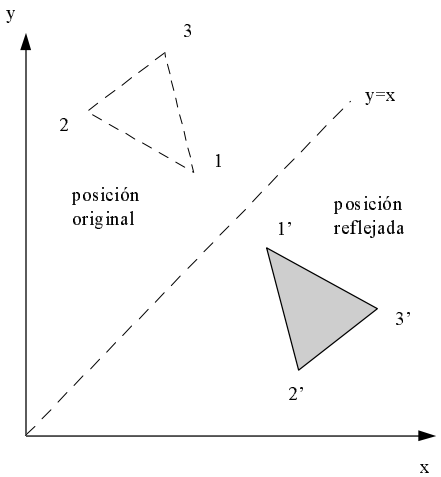


Esta reflexión es igual a una rotación de 180º en el plano de *xy* al utilizar el punto de reflexión como el punto de pivote, P_r.

Si elegimos el eje de reflexión como la línea diagonal $y = x$, la matriz de reflexión es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

La reflexión se muestra en la siguiente figura:



Podemos derivar esta matriz al concatenar una secuencia de matrices de rotación y de reflexión del eje de las coordenadas.
Una secuencia posible es:

1. Realizar un rotación en el sentido del reloj a través de un ángulo de 45º, que gira la línea *y=x* sobre el de eje de *x*.
2. Luego, llevamos a cabo una reflexión con respecto al eje de x.

3. Finalmente, se gira la línea $y=x$ de regreso a su posición original con una rotación a través de 45º en sentido opuesto al reloj.

Una secuencia de transformaciones equivalente consiste primero en reflejar el objeto alrededor del eje de y y después girarlo 90º en sentido opuesto al reloj.

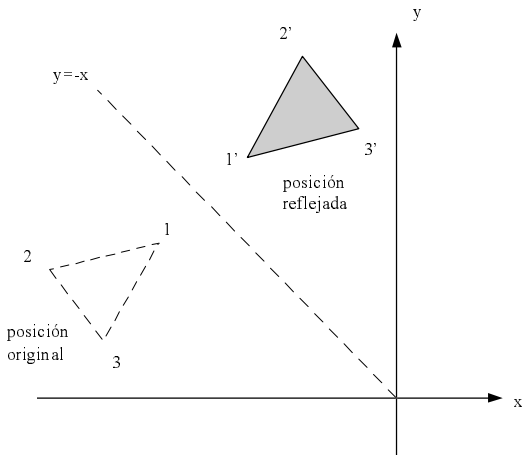
Para obtener una matriz de transformación para una reflexión alrededor de la diagonal $y=-x$, podemos concatenar las matrices para la secuencia de transformación:

1. Rotación de 45º en el sentido del reloj.
2. Reflexión alrededor del eje de y.
3. Rotación de 45º en sentido opuesto al reloj.

La matriz de transformación que resulta es

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

La siguiente figura muestra la reflexión:



Las reflexiones alrededor de cualquier línea $y=mx+b$ en el plano de xy se pueden lograr con una combinación de las transformaciones de traslación-rotación-reflexión.

1. En general, primero trasladamos la línea de modo que pase a través del origen.
2. Después podemos girar la línea sobre uno de los de ejes de las coordenadas y reflejarla alrededor de ese eje.
3. Por ultimo, regresamos la línea a su posición original con las transformaciones inversas de rotación y traslación.

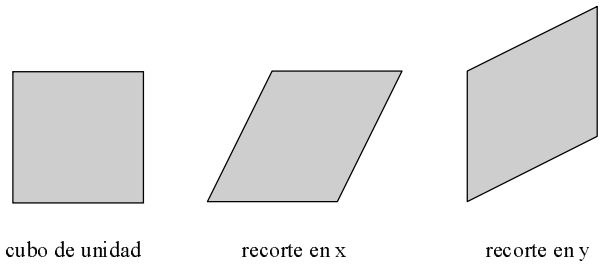
Podemos implementar las reflexión con respecto de los ejes de las coordenadas o con el origen de las coordenadas como transformaciones de escala con factores de escala negativos.

Además, los elementos de la matriz de reflexión se pueden establecer para valores distintos a ± 1.

Los valores cuyas magnitudes son mayores a 1 cambian la imagen de espejo mas lejos del eje de reflexión y los valores cuyas magnitudes son menores a 1 llevan la imagen de espejo mas cerca del eje de reflexión.

5.4.2 Recorte

Una transformación que distorsiona la forma de un objeto de manera que la forma que se transforma aparece como si el objeto estuviera compuesto por capas internas que se deslizaron una sobre otra, llamada **transformación de recorte** (**shear**).
Las transformaciones de recorte bidimensionales son de dos tipos: un recorte en el eje de *x* y un recorte en el eje de *y*.
La siguiente figura muestra los efectos de recortar el cubo de unidad sobre cada eje.



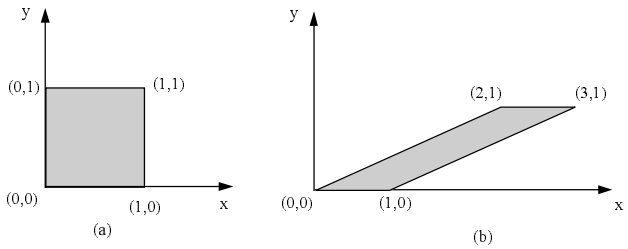
Un recorte de la dirección de x en relación con el eje de x se produce con la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

que transforma las posiciones de las coordenadas como:

$$x' = x + sh_x \cdot y, \quad y' = y \tag{5.54}$$

cualquier numero real se puede asignar para el parámetro de recorte sh_x.
Entonces, una posición de las coordenadas (x,y) se cambia de forma horizontal por una cantidad proporcional a su distancia (valor de y) del eje de x (y=0).
Por ejemplo, al establecer $sh_x = 2$, se cambia el cuadrado de unidad en un paralelogramo, como se muestra en la siguiente figura:



Los valores negativos para sh_x cambian las posiciones de las coordenadas hacia la izquierda.

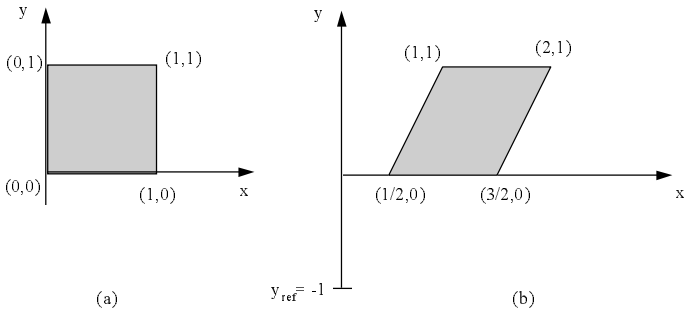
Podemos generar los recortes de la dirección de x en relación con otras líneas de referencia con:

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & -sh_x \cdot y_{\text{ref}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

con las posiciones de las coordenadas transformadas como

(5.56) $$x' = x + sh_x \cdot (y - y_{ref}), \qquad y' = y$$

Un ejemplo de esta transformación de recorte se muestra en la siguiente figura, para un valor de parámetro de recorte de 1/2 en relación con la línea $y_{ref} = -1$.



Un recorte en la dirección de y se da con la siguiente matriz de transformación:

(5.57) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que transforma las posiciones de las coordenadas como:

(5.58) $$x' = x + sh_x \cdot y, \quad y' = y$$

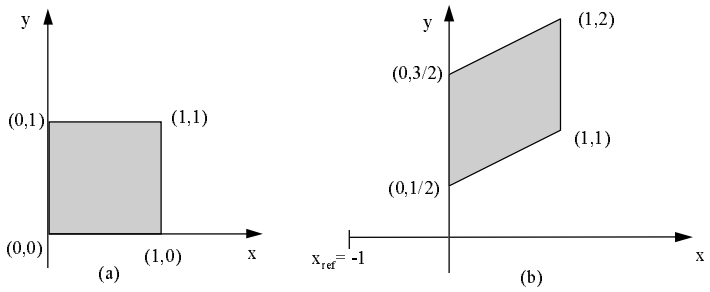
Podemos generar los recortes de la dirección de y en relación con otras líneas de referencia con:

(5.59) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & -sh_y \cdot x_{ref} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con las posiciones de las coordenadas transformadas como

(5.60) $$x' = x, \qquad y' = y + sh_y \cdot (x - x_{ref})$$

Esta transformación cambia una posición de las coordenadas en forma vertical por una cantidad proporcional a su distancia de la línea de referencia $x = x_{ref}$.
La siguiente figura ilustra la conversión de un cuadrado en un paralelogramo con $sh_y = 1/2$ y $x_{ref} = -1$.

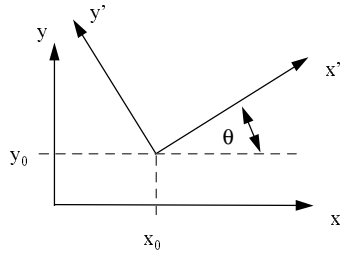


Las operaciones de recorte se pueden expresar como secuencias de las transformaciones básicas.
Por ejemplo, la matriz (5.53) de recorte de la dirección de *x* se puede escribir como una transformación compuesta que comprende una serie de matrices de rotación y escala que escalarían el cuadrado de unidad a lo largo de su diagonal, en tanto que mantiene las longitudes y orientaciones originales de los bordes paralelos al de eje de *x*.
Los cambios en las posiciones de los objetos con relación a las líneas de referencia de recorte equivalen a las traslaciones.

5.5 Transformación de Sistemas de Coordenadas

Con frecuencia las aplicaciones gráficas requieren de la transformación de las descripciones del objeto de un sistema de coordenadas a otro.
En ocasiones, los objetos se describen en marcos de referencia no cartesianos que aprovechan la simetría del objeto.
Entonces, las descripciones de coordenadas en estos sistemas se deben convertir en coordenadas cartesianas de dispositivo para desplegarse.
Algunos ejemplos de sistemas bidimensionales no cartesianos son las coordenadas polares, las coordenadas elípticas y las coordenadas parabólicas.
En otros casos, necesitamos transformar entre dos sistemas cartesianos.
Para aplicaciones de modelado y diseño, los objetos individuales se pueden definir en sus propias referencias cartesianas locales y, entonces, las coordenadas locales se deben transformar para ubicar los objetos dentro de todo el sistema de coordenadas de la escena.
Por ejemplo, un programa de administración de instalaciones para oficinas cuenta con descripciones de referencia de coordenadas individuales para las sillas y mesas, así como para otros muebles que se pueden colocar en un plano de piso, con copias múltiples de las sillas y otros artículos en las distintas posiciones.
En otras aplicaciones, es probable que solo se desee volver a orientar la referencia de coordenadas para desplegar una escena.

Aquí se estudiara transformaciones entre dos marcos de referencias cartesianos.
La siguiente figura muestra dos sistemas cartesianos, con los orígenes de las coordenadas en (0,0) y (x_0,y_0) y con un ángulo de orientación θ entre los ejes de *x* y *x*'.



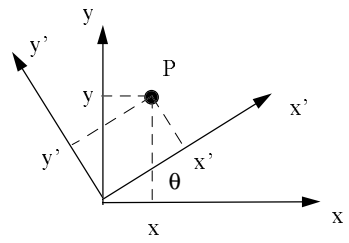
Para transformar las descripciones de objeto de las coordenadas de *xy* a las coordenadas de *x*'*y*', es necesario establecer una transformación que traslape los ejes *x*'*y*' con los ejes de *xy*.
Esto se realiza en dos pasos:

1. Trasladar de manera que el origen (x_0,y_0) del sistema *x*'*y*' se mueva al origen del sistema *xy*.
2. Girar el eje de *x*' sobre el eje de *x*.

La traslación del origen de las coordenadas se expresa con la operación matricial

$$T(-x_0,-y_0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_0\\ 0 & 1 & -y_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{5.59}$$

y la orientación de los dos sistemas después de la operación de traslación aparecería como en la siguiente figura:



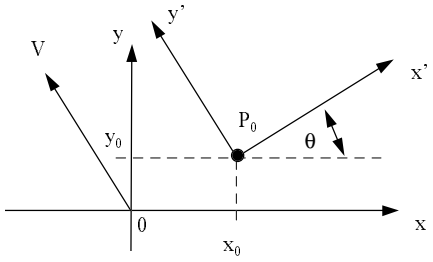
Para hacer que los dos sistemas coincidan, realizamos la rotación en el sentido del reloj:

$$R(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{5.60}$$

Al concatenar estas dos matrices de transformación, obtenemos la matriz compuesta completa para transformar las descripciones del objeto del sistema *xy* al sistema *x*'*y*':

$$M_{xyx'y'} = R(-\theta) \cdot T(-x_0, -y_0) \tag{5.61}$$

Un método alternativo para dar la orientación del segundo sistema de coordenadas es especificar un vector V que indica la dirección del eje positivo de *y*' como se ilustra en la siguiente figura:



El vector V se especifica como un punto en el marco de referencia *xy* en relación con el origen del sistema *xy*. Entonces, un vector unitario en la dirección de *y*' se puede obtener como

$$v = V/|V| = (v_x, v_y) \tag{5.62}$$

Y obtenemos el vector unitario u a lo largo del eje de *x*' al girar v 90° en el sentido del reloj:

$$u = (v_y, -v_x) = (u_x, u_y) \tag{5.63}$$

Como los elementos de cualquier matriz de rotación se pueden expresar como un conjunto de vectores unitarios ortogonales, la matriz para girar el sistema *x*'*y*' y hacer que coincida con el sistema *xy* se puede expresar como:

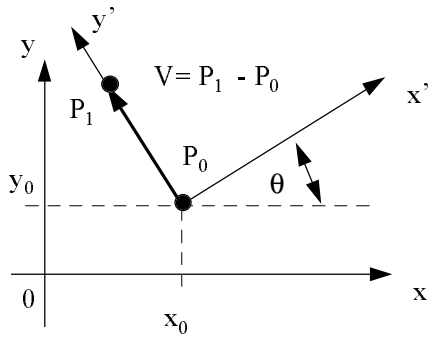
$$R = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.64}$$

Como ejemplo, supongamos que elegimos la orientación para el eje de *y*' como v = (-1,0), entonces el eje de *x*' esta en la dirección positiva de *y* y la matriz de transformación de rotación es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En forma equivalente podemos obtener esta matriz de rotación a partir de la ecuación (5.60) al establecer el ángulo de orientación como $\theta = 90º$.

En una aplicación interactiva, tal vez sea mas conveniente seleccionar la dirección para v en relación con la posición P_0 que especificarla con respecto del origen de la coordenadas de *xy*.
Entonces los vectores unitarios u y v se orientan como se muestra la siguiente figura:



Ahora, se calculan los componentes de v como:

$$\mathtt{v} = (\mathtt{P}_1 - \mathtt{P}_0)/|\mathtt{P}_1 - \mathtt{P}_0| \tag{5.65}$$

y u se obtiene como la perpendicular a v que forma un sistema cartesiano del lado derecho.

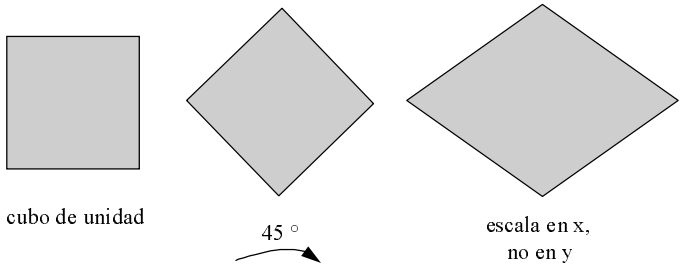
5.6 Transformación Afines

Una transformación de coordenadas de la forma

$$\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{xy}y + b_x \\ y' &= a_{yx}x + a_{yy}y + b_y \end{aligned} \tag{5.66}$$

se conoce como **transformación afín** bidimensional.
Cada una de las coordenadas transformadas *x*' y *y*' es una función lineal de las coordenadas originales de *x* y *y*, y los parámetros a_{ij} y b_k son constantes que determinan el tipo de transformación.
Las transformaciones afines tienen la propiedad de preservar el paralelismo de las líneas y los puntos finitos se diagraman en puntos finitos, pero no se preservan los largos y ángulos.

Una secuencia arbitraria de matrices de rotación, traslación, escala, reflexión, y recorte corresponde a una transformación afín (estas cinco transformaciones básicas se consideran transformaciones afines)
.
La siguiente figura muestra el resultado de aplicar una rotación de -45° y luego una escala no uniforme al cubo de unidad.



Es claro que no se preservan ni los ángulos ni las longitudes en esta secuencia, pero las líneas paralelas se han mantenido paralelas.
Operaciones adicionales de rotación, escala, traslación, reflexión y recorte no lograran que las líneas paralelas dejen de ser paralelas.

Otra transformación afín es la conversión de las descripciones de coordenadas de un sistema de referencia a otro, que se puede describir como una combinación de traslación y rotación.
Una transformación afín que comprende solo rotación, traslación y reflexivo conserva los ángulos y longitudes, así como las líneas paralelas.
Para estas tres transformaciones las longitudes y el ángulo entre dos líneas permanecen sin cambio después de la transformación.