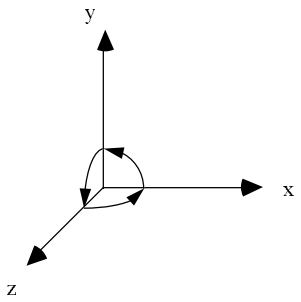
7. Transformaciones geométricas tridimensionales

Al igual que las transformaciones de 2D se pueden representar por matrices de 3x3 usando coordenadas homogeneas, las transformaciones de 3D se pueden representar por matrices de 4x4, provisto que usemos representaciones de puntos en coordenadas homogeneas en un espacio de 3D.
Por lo tanto, en lugar de representar un punto como (x,y,z), lo representamos como (x,y,z,W), donde dos de estas representaciones corresponden al mismo punto si uno es un multiple (no cero) del otro.
Como en 2D, una representacion estandar de un punto (x,y,z,W) con $W \neq 0$ se da por $(x/W,y/W,z/W,1)$.
La interpretacion geometrica es que que cada punto en espacio de 3 se representa por una linea a traves del origen en espacio de 4, y las representaciones homogenizadas de estos puntos forman un subespacio de 3D del espacio de 4 que se define por la ecuacion $W = 1$.

7.1 Coordenadas Homogeneas

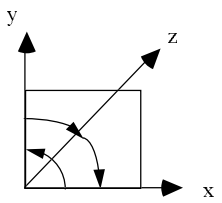
El sistema de coordenadas de 3D usado aqui es **de mano derecha** (**right handed**), como se ve en la siguiente figura:



Por convencion, rotaciones positivas en un sitema de mano derecha son tales que, cuando se mira de un eje poisitvo hacia el origen, una rotacion de 90° contra el sentido del relo transformaria un eje positivo en el otro.
La siguiente tabla muestra la convencion:

Eje de rotación es	Dirección de rotación positiva
x	y a z
y	z a x
z	x a y

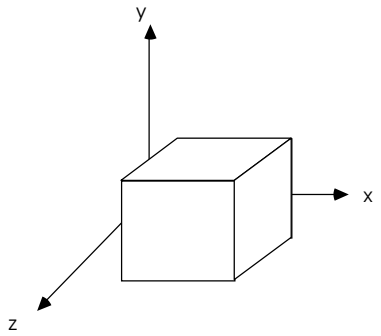
Se usa un sistema de mano derecha ya que es la convencion matematica, aunque es conveniente en grafica de 3D pensar en un sistema de mano izquierda superpuesto sobre el despliegue como se muestra en la siguietne figura, ya que un sistema de mano izquierda da una interpretacion natural de que los valores mayores de z estan mas alejados del que mira.



Notese que, en un sistema de mano izquierda, las rotaciones positivos son en contra del sentido del reloj cuando estamos viendo desde un eje positivo hacia el origen.

Esta definicion de rotaciones positivas permite que las mismas matrices de rotacion dadas a continuacion se usen para sistemas de coordenadas de mano derecha o izquierda.
Conversion de derecha a izquierda o de izquierda a derecha se discute mas adelante.

Por ejemplo, un cubo en un sistema de mano de recha se veria como a continuacion:



7.1.1 Traslacion

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una traslacion inversa seria dada por:

$$T(-d_x, -d_y, -d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & 0 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 & -d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.1.2 Escalacion

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una esclacion inversa seria dada por:

$$S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.1.3 Rotacion

La rotacion, correspondiente a la de 2D, esta dada en relacion al eje z:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el punto (1,0,0), o sea el vector unidad en el eje de *x* al rotarse en 90º debe producir el vector unidad en el eje de *y* (0,1,0):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La rotacion con respecto al eje *x* se da por:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La rotacion con respecto al eje *y* se da por:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las columnas (y las filas) de la submatriz superior izquierda de 3x3 de $R_z(\theta)$, $R_x(\theta)$, y $R_y(\theta)$, son vectores unitarios mutuamente perpendiculares y la submatriz tiene un determinante de 1, lo que significa que las tres matrices son ortogonales especiales.
Tambien, la submatriz superior izquierda de 3x3 formada por un secuencia arbitraria de rotaciones es ortogonal especial.
Recuerdese que las transformaciones ortogonales preservan distancias y angulos.

La inversa para cada rotacion esta dad poniendo el negativo del angulo de rotacion original.

La inversa de cualquier transformacion ortogonal B es simplemente su transpuesta: $B^{-1} = B^{T}$.
De hecho, tomano la transpuesta no necesita involucrar inclusiva intercambiar elementos en el arreglo que guarda la matriz, solo es necesario intercambiar indices de filas y columnas cuando se accesa el arreglo.
Notese que este metodo de encontrar una inversa es consistente con el resultado de negar θ para encontrar el inverso de $R_z(\theta)$, $R_x(\theta)$, y $R_y(\theta)$.

7.2 Otras Transformaciones

7.2.1 Reflexion

Una reflexion tridimensional se puede realizar con respecto de un *eje de reflexion* seleccionado o de un *plano de reflexion* especifico.
En general, las matrices de reflexion tridimensional se establecen de manera similar a aquellas para dos dimensiones.
Las reflexiones con respecto de un eje dado son equivalentes a rotaciones de 180° sobre ese eje.
Las reflexiones con respecto de un plano equivalen a rotaciones de 180° en un espacio cuatridimensional.
Cuando el plano de reflexion es un plano de coordenadas (ya sea *xy*, *xz*, o *yz*), podemos considerar la transformacion como una conversion entre los sistemas del lado izquierdo y el lado derecho.
Estas transformaciones cambian el signo de las coordenadas de *z* sin alterar las coordenadas de *x* y *y*.
La representacion matricial para esta reflexion de los puntos con respecto del plano de *xy* es:

$$RF_z = RF_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de transformacion para invertir los valores de *x* y *y* se definen de manera similar, como las reflexiones con respecto del plano de *yz* y *xz*, respectivamente.
Es posible efectuar las reflexiones con respecto de otros planos como una combinacion de rotaciones y reflexiones del plano de las coordenadas.

7.2.2 Recorte (Shear)

Las transformaciones de recorte se pueden utilizar para modificar las formas de los objetos.
Tambien son utiles en la vista tridimensional para obtener transformaciones de proyeccion general.
En dos dimensiones, las transformaciones son con respecto de los ejes de x o y para distorsionar las formas de los objetos.
En tres dimensiones, tambien se puede generar recortes con respecto del eje de z.

El recorte con respecto al eje z es

$$SH_z(sh_x, sh_y) = SH_{xy}(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El efecto es la alteracion de los valores de las coordenadas de x y y en una cantidad proporcional al valor de z, en tanto que la coordenada de z permanece sin cambios.
Las fronteras de los planos que son perpendiculares al eje de las z se modifican de esta manera por una cantidad proporcional a las z.

Aplicando SH_{xy} al punto $[x \;\; y \;\; z \;\; 1]^T$, tenemos $[x+sh_x \cdot z \;\; y+sh_y \cdot z \;\; z \;\; 1]^T$.
Recortes sobre los ejes de x y y tienen una forma similar.

7.3 Primitivas Generales

Hasta ahora nos hemos enfocado en transformar puntos individuales.
Transformamos lineas, estas definidas por dos puntos, al transformar los extremos.
Planos, si estan definidos por tres puntos, pueden tratarse de la misma forma, pero a menudo se definen por una ecuacion del plano, y los coeficientes de la ecuacion del plano deben transformarse de forma diferente.
Tambien se necesita transformar la normal del plano.
Si representamos un plano como un vector columna de los coeficientes de la ecuacion del plano

$$N = [A \;\; B \;\; C \;\; D]^T$$

Un plano se define por todos los puntos P tales que $N^T \cdot P = 0$, donde $P = [x \;\; y \;\; z \;\; 1]^T$.
Este producto punto produce la ecuacion familiar del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Esto tambien se puede expresar como el producto del vector fila de los coeficientes por el

vector columna P: $N^T \cdot P = 0$.
Ahora supongamomos que transformamos todos los puntos P en el plano por alguna matriz M.

Para mantener $N^T \cdot P = 0$ para los puntos transformados, quisieramos transformar N por alguna matriz Q (a ser determinada) dando la ecuacion

$$(Q \cdot N)^T \cdot M \cdot P = 0$$

Esta ecuacion puede reescribirse como

$$N^T \cdot Q^T \cdot M \cdot P = 0$$

usando la igualdad

$$(Q \cdot N)^{T} = N^{T} \cdot Q^{T}$$

La ecuacion se mantendra si $Q^{T} \cdot M$ es un multiplo de la matriz de identidad.

Si el multiplicador es 1, esta situtacion da que $Q^{T} = M^{-1}$, o $Q = (M^{-1})^{T}$
Por lo tanto, el vector columna N' de coeficientes para un plano transformado por M se da por

$$N' = (M^{-1})^{T} \cdot N$$

La matriz $(M^{-1})^{T}$ no tiene que existir, en general, ya que el determinante de M puede ser cero.

Esta situacion ocuirriria si M incluye una proyeccion (como un proyeccion de perspectiva).

Si solo la normal del plano se transforma y si M consiste solo de composiciones de matrices traslacion, rotacion, y esclacion uniforme, entonces las matematicas es aun mas simple.

$$N' = [A' \; B' \; C' \; 0]^{T}$$

7.4 Composicion de Transformaciones

Cualquier numero de matrices de rotacion, traslacion, y escalacion puede multiplicarse.
El resultado tiene la forma de:

$$M = \begin{bmatrix} rs_{11} & rs_{12} & rs_{13} & trs_{x} \\ rs_{21} & rs_{22} & rs_{23} & trs_{y} \\ rs_{31} & rs_{32} & rs_{33} & trs_{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composicion de transformaciones en 3D son utiles, como en 2D, para escalar o rotar una figura en su misma posicion, por medio de una traslacion inicial al origen, seguida de la transformacion correspondiente, y finalmente una traslacion de regreso.

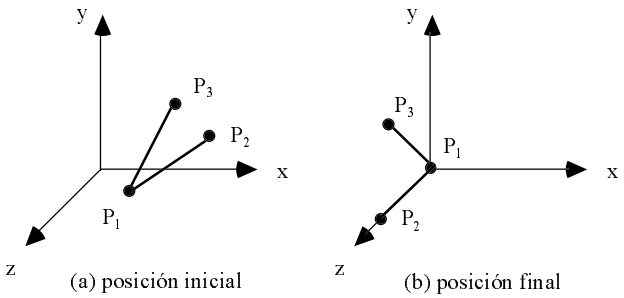
7.4.1 Composicion para Rotacion

Se puede girar o escalar una figura de acuerdo a un eje arbitrario no paralelo a uno de los ejes de coordenadas.
Para el caso de rotacion, se puede llevar esta a cabo siguiendo los siguientes pasos:

1. Se traslada el objeto de manera que el eje de rotacion pase a traves del origen de las coordenadas.
2. Se gira el objeto de modo que el eje de rotacion coincida con uno de los ejes de las corodenadas.
3. Se efectua la rotacion especifica con respecto del eje de coordenadas.
4. Se aplican las rotaciones inversas para regresar el eje de rotacion a su orientacion inicial.
5. Se aplica la traslacion inversa para regresar el eje de rotacion a su posicion original.

Podemos trasnformar el eje de rotacion en cualquiera de los tres ejes de las coordeandas, siendo el eje de z una opcion logica.
Se puede definir un eje de rotacion con dos posiciones de coordenadas, o con un punto de coordenada y angulos de direccion (o cosenos de direccion) entre el eje de rotacion y los dos ejes de coordenadas.

El ejemplo que se utilizara sera transformar dos segmentos dirigidos P_1P_2 y P_1P_3 de su posicion inicial (a) hacia su posicion final (b).



Por lo tanto, P_1 se debe trasladar al origen, P_1P_2 debe estar sobre el eje positivo de z, y P_1P_3 debe esta en la parte positiva del eje de y del plano (y,z).
Los largos de las lineas no deben afectarse por la transformacion.

***
El vector del eje es

$$V = P_2\text{-}P_1 = (x_2\text{-}x_1,\ y_2\text{-}y_1,\ z_2\text{-}z_1)$$

Se define un vector unitario R a lo largo del eje de rotacion como

$$R = V/|V| = (a,\ b,\ c)$$

donde los componentes a, b, c del vector unitario R son los cosenos de direccion para el eje de rotacion:

$$a = (x_2\text{-}x_1)/|V|,$$
$$b = (y_2\text{-}y_1)/|V|,$$
$$c = (z_2\text{-}z_1)/|V|$$

|V| es la magnitud del vector y está dada por

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Si la rotacion debe tener la direccion opuesta (en el sentido del reloj viendo de P_2 a P_1), entonces voltearíamos el vector del eje V y el vector unitario R de modo que señalen de P_2 a P_1.
***

Se presentan dos formas de lograr la transformacion deseada.
El primer enfoque es componer las transformaciones priomitivas T, R_z, R_x, y R_y.
Este enfoque, aunque un poco tedioso, es facil de ilustrar, y comprenderlo nos ayudara en lograr una comprension de las transformaciones.
El segundo enfoque, usando propiedades de las matrices ortogonales especiales, se explica mas concisamente pero de forma mas abstracta.

7.4.1.1 Coordenadas Globales

Para trabajar con las transformaciones primitivas, dividimos el problema dificil en subproblemas mas faciles.
En este caso, la transformacion deseada se puede hacer en cuatro pasos:

1. Trasladar P_1 al origen.
2. Rotar alrededor del eje de y tal que P_1P_2 quede en el plano (y,z).
3. Rotar alrededor del eje de x tal que P_1P_2 quede sobre el eje positivo de z.
4. Rotar alrededor del eje de z tal que P_1P_3 quede en el plano (y,z).

Paso 1: Trasladar P_1 al origen

La traslacion es

$$T(-x_1,-y_1,-z_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -x_1\\ 0 & 1 & 0 & -y_1\\ 0 & 0 & 1 & -z_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Aplicando T a P_1, P_2, y P_3 da

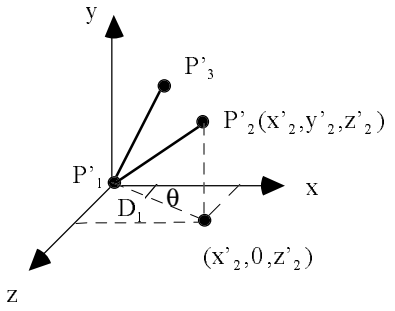
$$P_1' = T(-x_1,-y_1,-z_1)\cdot P_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$P_2' = T(-x_1,-y_1,-z_1)\cdot P_2 = \begin{bmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\\1\end{bmatrix}$$

$$P_3' = T(-x_1,-y_1,-z_1)\cdot P_3 = \begin{bmatrix}x_3-x_1\\y_3-y_1\\z_3-z_1\\1\end{bmatrix}$$

Paso 2: Rotar sobre el eje de *y*

La siguiente figura muestra P_1P_2 despues del paso 1, junto con la proyeccion de P_1P_2 sobre el plano (x,z).



El angulo de rotacion es -(90-θ) = θ - 90.
Entonces

$$\cos(\theta - 90) = \sin\theta = z'_2/D_1 = (z_2 - z_1)/D_1$$

$$\sin(\theta - 90) = -\cos\theta = -x'_2/D_1 = -(x_2 - x_1)/D_1$$

donde

$$D_1 = \sqrt{\left(z'_2\right)^2 + \left(x'_2\right)^2} = \sqrt{\left(z_2 - z_1\right)^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2}$$

Cuando se sustituyen estos numeros en la ecuacion de rotacion R_y

$$R_y(\theta - 90) = \begin{bmatrix} \cos(\theta - 90) & 0 & \sin(\theta - 90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta - 90) & 0 & \cos(\theta - 90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$R_y(\theta - 90) = \begin{bmatrix} \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 & -\frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 & \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

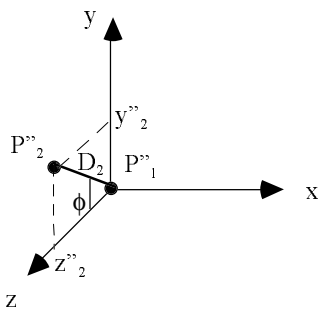
$$P''_2 = R_y(\theta - 90) \cdot P'_2 = \begin{bmatrix} \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 & -\frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 & \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P''_2 = R_y(\theta - 90) \cdot P'_2 = [0 \;\; y_2 - y_1 \;\; D_1 \;\; 1]^T$$

Como es de esperarse, el componente x de P''_2 es cero, y el componente z es el largo D_1.

Paso 3: Rotar sobre el eje de *x*

La siguiente figura muestra P_1P_2 despues del paso 2.



El angulo de rotacion es ϕ, para el cual

$$\cos\phi = z''_2/D_2 = D_1/D_2$$

$$\sin\phi = y''_2/D_2 = (y_2\text{-}y_1)/D_2$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -sin\phi & 0 \\ 0 & sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1/D_2 & -(y_2-y_1)/D_2 & 0 \\ 0 & (y_2-y_1)/D_2 & D_1/D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$D_2 = |P''_1P''_2|$, la longitud de la linea $P''_1P''_2$.

Pero la longitud de la linea $P''_1P''_2$ es la misma que P_1P_2, ya que las transformaciones de rotacion y traslacion preservan la longitud, por lo tanto

$$D_2 = |P''_1P''_2| = |P_1P_2| = \sqrt{(z_2-z_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2}$$

El resultado de la rotacion en el paso 3 es

$$P'''_2 = R_x(\phi)\cdot P''_2 = R_x(\phi)\cdot R_y(\theta - 90)\cdot P'_2 = R_x(\phi)\cdot R_y(\theta - 90)\cdot T\cdot P_2 = [0\ 0\ |P_1P_2|\ 1]^T$$

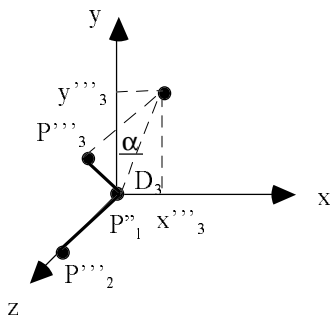
$$R_xR_y = \begin{bmatrix} (z_2-z_1)/D_1 & 0 & -(x_2-x_1)/D_1 & 0 \\ -(y_2-y_1)(x_2-x_1)/D_1D_2 & D_1/D_2 & -(y_2-y_1)(z_2-z_1)/D_1D_2 & 0 \\ -(x_2-x_1)/D_2 & (y_2-y_1)/D_2 & (z_2-z_1)/D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}T = \begin{bmatrix} \frac{(z_2-z_1)}{D_1} & 0 & -\frac{(x_2-x_1)}{D_1} & -\frac{x_1(z_2-z_1)}{D_1} + \frac{z_1(x_2-x_1)}{D_1} \\ -\frac{(y_2-y_1)(x_2-x_1)}{D_1D_2} & \frac{D_1}{D_2} & -\frac{(x_2-x_1)(z_2-z_1)}{D_1D_2} & \frac{x_1(y_2-y_1)(x_2-x_1)}{D_1D_2} - \frac{y_1D_1}{D_2} + \frac{z_1(y_2-y_1)(z_2-z_1)}{D_1D_2} \\ \frac{(x_2-x_1)}{D_2} & \frac{(y_2-y_1)}{D_2} & \frac{(z_2-z_1)}{D_2} & -\frac{x_1(x_2-x_1)}{D_2} - \frac{y_1(y_2-y_1)}{D_2} - \frac{z_1(z_2-z_1)}{D_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sea, P_1P_2 ahora coincide con el eje positivo de z.

Paso 4: Rotar sobre el eje de *z*

La siguiente figura muestra P_1P_2 y P_1P_3 despues del paso 3.



P'''_2 esta sobre el eje de z y P'''_3 en la siguiente posicion

$$P'''_3 = [\, x'''_3 \;\; y'''_3 \;\; z'''_3 \;\; 1 \,]^{T} = R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90) \cdot T(-x_1, \; -y_1, \; -z_1) \cdot P_3$$

La rotacion es por el angulo positivo α, con

$$\cos a = y'''_3 / D_3$$

$$\sin a = x'''_3 / D_3$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$D_3 = \sqrt{x_3'''^2 + y_3'''^2}$$

El paso 4 logra el resultado final.

La matriz compuesta

(5.59) $$R_z(\alpha) \cdot R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90) \cdot T(-x_1, \; -y_1, \; -z_1) = R \cdot T$$

es la transformacion requerida, con $R = R_z(\alpha) \cdot R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90)$.

7.4.1.1.1 Ejemplo

Tomamos como ejemplo tres puntos organizados de manera que no se requiera una última rotación en z para así simplificar los cálculos: $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,2,2)$, $P_3 = (1,2,1)$ donde

$$D_{12} = \sqrt{3} \qquad D_{13x12} = \sqrt{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

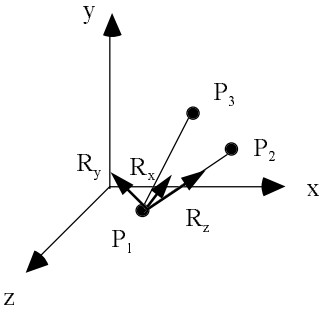
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.4.1.2 Coordenadas locales para alinear figura con ejes

La segunda forma de obtener la matriz *R* es utilizando un sistema de coordeandas locales que se define mediante el eje de rotacion y forma solo una submatriz con columnas que son los vectores de coordeandas unitarias locales. La siguiente figura muestra los vectores individuales R_z, R_x, y R_y.



Reemplazando los subindices secundarios con *x*, *y*, y *z*, por conveniencia notacional, tenemos que la matriz compuesta de rotacion esta dada por

$$R = \begin{bmatrix} r_{1_x} & r_{2_x} & r_{3_x} & 0 \\ r_{1_y} & r_{2_y} & r_{3_y} & 0 \\ r_{1_z} & r_{2_z} & r_{3_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde R_z es el vector unitario a traves de P_1P_2 que rotara hacia el eje positivo de z,

$$R_z = [\, r_{1z} \;\; r_{2z} \;\; r_{3z} \,]^{\mathrm{T}} = P_1P_2 \,/\, |\, P_1P_2 \,|$$

Ademas, el vector unitario R_x es perpendicular al plano de P_1, P_2, y P_3 y rotara hacia el eje positivo de x, tal que R_x debe ser el producto cruz normalizado de los dos vectores en el plano:

$$R_x = [\, r_{1x} \;\; r_{2x} \;\; r_{3x} \,]^{\mathrm{T}} = P_1P_3 \times P_1P_2 \,/\, |\; P_1P_3 \times P_1P_2 \,|$$

Finalmente,

$$R_y = [\, r_{1y} \;\; r_{2y} \;\; r_{3y} \,]^{\mathrm{T}} = R_z \times R_x$$

rotara en eje positivo de y.
La matriz compuesta final sera

$$\begin{bmatrix} r_{1_x} & r_{2_x} & r_{3_x} & 0 \\ r_{1_y} & r_{2_y} & r_{3_y} & 0 \\ r_{1_z} & r_{2_z} & r_{3_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T(-x_1, -y_1, -z_1) = R \cdot T$$

donde R y T son como en la ecuacion (5.59).

En termino de los tres puntos:

$R_z = P_1P_2 \,/\, |\, P_1P_2 \,| = (x_2 - x_1)/D_{12},\;\; (y_2 - y_1)/D_{12},\;\; (z_2 - z_1)/D_{12}$

$$D_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$R_x = P_1P_3 \times P_1P_2 \,/\, |\; P_1P_3 \times P_1P_2 \,| =$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \end{bmatrix}$$

$((y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (y_2 - y_1)(z_3 - z_1))/D_{13x12}$,

$((z_3 - z_1)(x_2 - x_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1))/D_{13x12}$,

$((x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1))/D_{13x12}$,

$$D_{13x12} = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}}$$

$R_y = R_z \times R_x =$

$((y_2 - y_1)((x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)) - (z_2 - z_1)((z_3 - z_1)(x_2 - x_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)))/(D_{12}D_{13x12})$,

$((z_2 - z_1)((y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (y_2 - y_1)(z_3 - z_1)) - (x_2 - x_1)((x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)))/(D_{12}D_{13x12})$,

$((x_2 - x_1)((z_3 - z_1)(x_2 - x_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)) - (y_2 - y_1)((y_3 - y_1)(z_2 - z_1) - (y_2 - y_1)(z_3 - z_1)))/(D_{12}D_{13x12})$,

7.4.1.2.1 Ejemplo

$P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,2,2)$, $P_3 = (1,2,1)$

$$D_{12} = \sqrt{3}$$

$$D_{13x12} = \sqrt{2}$$

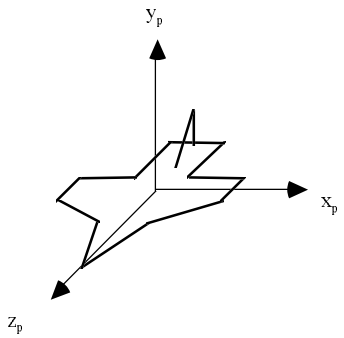
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

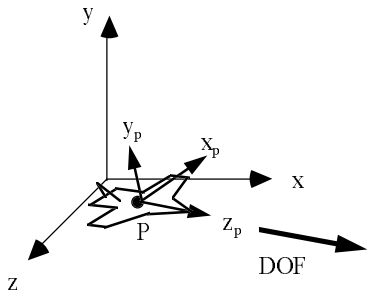
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.4.1.3 Coordenadas locales para alinear ejes con figura

En otro ejemplo, consideremos un avion definido por su sistema de coordenadas x_p, y_p, z_p, centrado en el origen, como se muestra en la siguiente figura.



Quiseramos transformar el avion de manera que apunte a la direccion dada por el *DOF* (*direction of flight*), este centrada en *P*, que no este ladeado, como se muestra en la siguiente figura.



La transformacion para hacer esta reorientacion consiste de una rotacion para apuntar el avion en la direccion apropiada, seguida por una traslacion del origen a *P*.
Para encontrar la matriz de rotacion, determinamos en que direccion cada uno de los ejes x_p, y_p, z_p apunta en la figura anterior, asegurandonos que las direcciones esten normalizandas, y usamos estas direcciones como vectores de columna en la matriz de rotacion.

El eje z_p debe transformarse a la direccion *DOF*, y el eje x_p debe transformarse en un vector horizontal perpendicular a *DOF* - o sea, en la direcion $y \times DOF$, el producto cruz de y y *DOF*.
La direccion y_p se da por $z_p \times x_p = DOF \times (y \times DOF)$, el producto cruz de z_p y x_p: por lo tanto, las tres columnas de la matriz de rotacion son los vectores normalizados $| y \times DOF |$, $| DOF \times (y \times DOF) |$, $| DOF |$

$$R = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ |y \times DOF| & |DOF \times (y \times DOF)| & |DOF| & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si *DOF* esta en la direccion del eje de y, la situacion es problematica ya que existe un conjunto infinito de vectores para el vector horizontal.
Este problema se refleja en el algebra, ya que los productos cruz $y \times DOF$ y $DOF \times (y \times DOF)$ son cero.
En este caso especial, *R* no es una matriz de rotacion.

7.4.1.3.1 Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T.R=

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que si se multiplica la matriz anterior por la resultante en el ejercicio opuesto (6.4.1.2) se obtiene la matriz identidad, por la cual las dos transformaciones son inversas.

7.4.2 Composicion para Escalacion

La escalacion con respecto de una posicion fija se puede representar con la siguiente secuencia de transformaciones:

1. Se traslada el punto fijo al origen.
2. Se escala el objeto con respecto del origen de las coordenadas.
3. Se traslada el punto fijo de regreso a su posicion original.

7.5 Transformacion de Sistema de Coordenadas

Hasta ahora se ha discutido tranformar un conjunto de puntos pertenecientes a un objeto a otro conjunto de puntos, cuando ambos conjuntos estan en el mismo sistema de coordenadas.

Con este enfoque, el sistema de coordenadas no se modifica y el objeto se transforma con respecto al origen del sistema de coordenadas.
Una forma alternativa pero equivalente de pensar sobre una transformacion es como un cambio del sistema de coordenadas.
Este enfoque es util cuando multiples objetos, cada uno definido con su propio sistema de coordenadas locales, se combinan y se desea expresar estas coordenadas de los objetos como un sistema de coordenadas global unico.

Definamos $M_{i\leftarrow j}$ como una transformacion que convierte la representacion de un punto en el sistema de coordenadas j a su representacion en el sistema de coordenadas i.

Definimos $P^{(i)}$ como la representacion de un punto en el sistema de coordenada i, $P^{(j)}$ como la representacion de un punto en el sistema de coordenada j, y $P^{(k)}$ como la representacion de un punto en el sistema de coordenada k; entonces,

$$P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)}$$

$$P^{(j)} = M_{j\leftarrow k} \cdot P^{(k)}$$

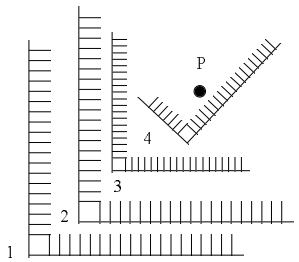
Sustituyendo tenemos

$$P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)} = M_{i\leftarrow j} \cdot M_{j\leftarrow k} \cdot P^{(k)} = M_{i\leftarrow k} \cdot P^{(k)}$$

donde

$$M_{i\leftarrow k} = M_{i\leftarrow j} \cdot M_{j\leftarrow k}$$

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra cuatro sistemas de coordenadas diferentes:



Las transformaciones entre coordenadas son las siguientes:

$$M_{1\leftarrow 2} = T(4,2)$$
$$M_{2\leftarrow 3} = T(2,3) \cdot S(0.5,0.5)$$
$$M_{3\leftarrow 4} = T(6.7,1.8) \cdot R(-45^{o})$$

Entonces

$$M_{1\leftarrow 3} = M_{1\leftarrow 2} \cdot M_{2\leftarrow 3} = T(4,2) \cdot T(2,3) \cdot S(0.5,0.5)$$

Las coordenadas de P son las siguientes segun la figura y para cada sistema de coordenadas:

$$P^{(1)} = (10,8)$$
$$P^{(2)} = (6,6)$$
$$P^{(3)} = (8,6)$$
$$P^{(4)} = (4,2)$$

Esto se comprueba mediante $P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)}$, para $1 \le i,j \le 4$.

Tambien notamos que $M_{i\leftarrow j} = M_{i\leftarrow j}^{-1}$.
Por lo tanto

$$M_{2\leftarrow 1} = M_{1\leftarrow 2}^{-1} = T(-4,-2)$$

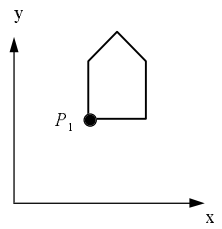
Como $M_{1\leftarrow 3} = M_{1\leftarrow 2} \cdot M_{2\leftarrow 3}$

$$M_{1\leftarrow 3}^{-1} = (M_{1\leftarrow 2} \cdot M_{2\leftarrow 3})^{-1} = M_{2\leftarrow 3}^{-1} \cdot M_{1\leftarrow 2}^{-1} = M_{3\leftarrow 2} \cdot M_{2\leftarrow 1}$$

Las matrices que convierten puntos representados en un sistema de coordenadas de mano izquierda o de mano derecha a puntos representados en el otro sistema de coordenadas es su propio inverso, y es

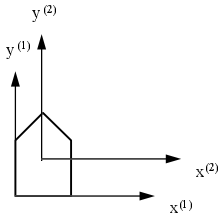
$$M_{R\leftarrow L} = M_{L\leftarrow R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos el caso simple de trasladar un conjunto de puntos que definen la casa mostrada en la siguiente figura al origen.

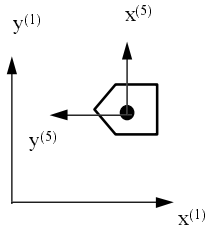


Esta transformacion es $T(-x_1, -y_1)$.
Etiquetando los dos sistemas de coordenadas como se muestra en la siguiente figura, se puede ver que la transformacion que mapea el sistema de corodenadas 1 al 2, es

$$M_{2\leftarrow 1} = T(x_1, y_1) = T(-x_1, -y_1)^{-1}$$



La regla general es que la transformacion que transforma un conjunto de puntos en un solo sistema de coordenadas es simplemente el inverso de la trasnformacion correspondiente para cambiar el sistema de coordenadas en el cual el punto se representa.
Esta relacion se puede ver en la siguiente figura, la cual se deriva de la rotacion y escaalcion de la casita.



La transformacion para los puntos representados en un solo sistema de coordenadas es

$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$

En la figura anterior, la transformacion de sistema de corodenadas es simplemente

$$\begin{aligned} M_{5\leftarrow 1} &= M_{5\leftarrow 4} \cdot M_{4\leftarrow 3} \cdot M_{3\leftarrow 2} \cdot M_{2\leftarrow 1} \\ &= \left(T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)\right)^{-1} \\ &= T(x_1, y_1) \cdot S\left(s_x^{-1}, s_y^{-1}\right) \cdot R(-\theta) \cdot T(-x_2, -y_2) \end{aligned}$$

Por lo cual,

$$P^{(5)} = M_{5\leftarrow 1}\, P^{(1)} = T(x_1, y_1) \cdot S\left(s_x^{-1}, s_y^{-1}\right) \cdot R(-\theta) \cdot T(-x_2, -y_2) \cdot P^{(1)}$$

Una pregunta importante relacionada al cambio de sistemas de coordenadas es como cambiamos transformaciones.
Supongamos que $Q^{(j)}$ es una transformacion en un sistema de coordenadas *j*.
Pudiera, por ejemplo, estar derivada de una de las transformaciones compuesta.
Supongamos que quisieramos encontrar la transformacion $Q^{(i)}$ en un sistema de coordenadas *i* que pudiera aplicarse a puntos $P^{(i)}$ en el sistema *i* y que produzca exactamente los mismos resultados que si fuera $Q^{(j)}$ aplicado a los puntos correspondientes $P^{(j)}$ en el sistema *j*.
La igualdad se representa por

$$Q^{(i)} \cdot P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot Q^{(j)} \cdot P^{(j)}$$

Sustituyendo con

$$P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)}$$

la expresion se vuelve

$$Q^{(i)} \cdot M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)} = M_{i\leftarrow j} \cdot Q^{(j)} \cdot P^{(j)}$$

Simplificando tenemos

$$Q^{(i)} \cdot M_{i\leftarrow j} = Q^{(j)} \cdot M_{i\leftarrow j}^{-1}$$