Modelado y Optimización   Otoño, 1999

1 Formulación de modelos

Para formular un problema a través de un modelo matemático se requiere identificar:

- Las Variables de Decisión: elementos que se pueden controlar y que constituyen una solución al problema
- Los Datos del Problema: elementos que no se pueden controlar directamente y que afectan el valor de las variables de decisión. Precios, demanda, costos, capacidad.
- La Función Objetivo: el criterio que permite escoger la o las mejores alternativas de solución. Partiendo de un enunciado veebal, el objetivo se expresa mediante una función que relaciona los datos con las variables de decisión.
- Las Restricciones: permiten definir las soluciones alternativas (soluciones factibles) que pueden ser cantidatos a cumplir con el objetivo. Restricciones de capacidad, de demanda, de oferta, de recursos en general.

  Ejemplo: Un refinería produce gasolina, turbosina y kerosene a partir de dos tipos de crudo, ligero y pesado. El barril de crudo ligero cuesta 25 dólares y el pesado 22. La demanda de estos productos y las cantidades que puede producirse de estos con cada barril de crudo se muestra en la siguiente tabla:

	Cantidades en barriles		
	Gasolina	Turbosina	Kerosene
Ligero	0.45	0.18	0.30
Pesado	0.35	0.36	0.20
Demanda	1,260,000	900,000	300,000

  El gerente de compras desea formular un modelo que le permita calcular la cantidad de cada tipo de crudo que debe adquirir para minimizar el costo de adquisición y satisfacer la demanda

- Variables de Decisión:
- Función Objetivo:
- Restricciones:

1.1 Programación Matemática

Un modelo de Programación Matemática se describe en la forma siguiente:

$$\max(\min)\ f(x_1,x_2......,x_n) \qquad \text{(Función Objetivo)}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$g_1(x_1,x_2......,x_n) - b_1 = -y_1$$
$$g_2(x_1,x_2......,x_n) - b_2 = -y_2$$
$$.......$$
$$g_m(x_1,x_2......,x_n) - b_m = -y_m$$

donde $f, g_1, g_2, ..., g_m$ son funciones reales definidas en R^n, $b_1, ..., b_m$ son constantes reales, las variables dependientes $y_j \in R$ pueden ser zero o nonegativas y las variables independientes x_i pueden ser nonegativas o libres.Algunos casos particulares

1. Si x_i son libres y y_j, b_j son cero se tiene el problema clásico de optimización con restricciones de igualdad tratado por Lagrange (1813)

2. Si $f(x_1,x_2......,x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ es lineal , cada $g_i(x_1,x_2......,x_n) = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$ es lineal y x_i y y_j son no negativas se tiene un modelo de Programación Lineal en forma canónica. En notación matricial:

$$\begin{array}{c} max(min)c'x \\ s.a \quad Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

Si como en el caso anterior requerimos que la función objetivo y las funciones que definen las restricciones sean lineales, que x_i sean nonegativas y y_j iguales a cero, se tiene un modelo de Programación Lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{c} max(min)c'x \\ s.a \quad Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

3. Si $f(x_1,x_2......,x_n)$ es una Función Quadrática y las restricciones son lineales se tiene un modelo de programación Quadrática. En forma matricial:

max (min) $\frac{1}{2}\,(x'Qx) + c'x$
s.a $Ax \leq b$
$x \geq 0$

4. Cuando $f(x_1,x_2......,x_n)$ y/o $g_i(x_1,x_2......,x_n)$ son no lineales se tiene un Modelo de Programación Nolineal. El término Programación Nolineal aparece por primera vez en 1951 en el *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, en el artículo *"Nonlinear Programming "*, University of California Press, Berkeley, 481-492.

(Subsubsubsection head:)Ejemplos: Un problema de Cartera Óptima de Inversión

Se tienen n instrumentos $r_1, r_2, ..., r_n$ con un retorno mensual esperado y una desviación estándar

El mejor portafolio depende de la adversión al riesgo del inversionista

○Dado un nivel de riesgo el inversionista prefiere el portafolio que le permita el mayor retorno esperado

○Para un retorno dado el inversionista preferirá el portafolio menos riesgoso

○Una medida estándar del riesgo es la varianza o desviación estándar de la cartera

○El inversionista desea un Portafolio Eficiente: uno para el cual no exista otro que ofrezca mayor retorno con el mismo o menor nivel de riesgo o uno para el cual no exista otro con menor riesgo con el mismo o mayor retorno esperado

○Los instrumentos de riesgo en el mercado no son necesariamente independientes entre si por lo que esta relación puede medirse con la matríz de correlación o la matríz de varianza-covarianza de los activos.

○Sea $w = (w_1,w_{2,......,}w_n) \in R^n$ el vector que tiene por componentes el porcentaje a invertir en cada uno de los instrumentos. Si r_i es el retorno esperado del instrumento i-ésimo, la función (en forma matricial): $Z = r'w$ representa el retorno esperado de una cartera

○ Si Q es la matriz varianza-covarianza de los instrumentos entonces $\sigma^2 = w'Qw$ reprsenta la varianza de la cartera.

Algunos modelos:

(Subsubsubsubsection head:)Caso 1: Maximizar el retorno (programación No-Lineal)

$$\begin{array}{c} \max r'w \\ s.a.\ \frac{1}{2}w'Qw \leq \sigma_*^2 \\ \sum w_i = 1 \\ w \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

La primera restricción expresa la $Varianza\ \ máxima\ \ aceptable$ Caso

2:Minimizar el riesgo (Programación Cuadrática)

$$\begin{array}{c} min\frac{1}{2}w'Qw \\ s.a \quad r'w \geq r_* \\ \sum w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

La primera restricción expresa el Retorno mínimo aceptable.
Caso 3: Balance riesgo-retorno (Programación Cuadrática) Se define una Función de Utilidad o valor del dinero, que expresa el riesgo que se acepta para un retorno esperado dado: $u(x) = 1 - e^{-kx}$ donde k es una constante que mide la adversión al riesgo. Si la tasa de retorno está normalmente distribuída con media $\overline{r}$ y matríz de covarianza Q entonces el retorno del portafolio Z está normalmente distribuído con media $Z = \overline{r}'w$ y varianza $\sigma^2 = w'Qw$. El valor esperado de la utilidad es:

$E(u(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\ \phi(x)\ dx =, 1 - e^{(-kZ + \frac{1}{2}k^2\sigma^2)}$, donde $\phi(x)$ representa la Función de Densidad Normal.

Como $f(x) = 1 - e^{-x}$ es estrictamente creciente max($E(u(x))$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \max r'w + \frac{1}{2}w'Qw \\ s.a \sum w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

1.1.1 Programación Estocástica

Cuando algunos de los parámetros que definen la función objetivo o las restricciones son variables aleatorias se tiene un modelo de Programación Estocástica.

(Subsubsubsubsection head:)Ejemplo:

El gerente de compras de una empresa comercializadora debe adquirir producto para vender a sus clientes.

○El producto puede almacenarse de un período a otro

○Se conoce la demanda, el precio del producto y el costo de mantener producto en inventario para el primer período de planeación pero no exactamente la demanda, el precio y el costo de inventario para el segundo período.

○Se pretende comprar para dos períodos. Si el precio y la demanda aumentan en el segundo período puede ser conveniente comprar producto para ambos períodos.

○Se pueden plantear escenarios para el precio, costo de inventario y demanda del segundo período pero no se sabe con certeza que escenario va a ocurrir.

(Subsubsubsubsection head:)Problema:

○Minimizar el costo de la estrategia de compras
○Satisfacer la demanda comprando o usando el producto almacenado
○Almacenar lo no usado para el siguiente período

Se pueden resolver el problema de varias maneras:
○ Resolver el problema para cada escenario y decidir la mejor estrategia en base a otros factores
○Plantear un escenario promedio
○Plantear un Modelo de Programación Lineal Estocástica que minimice el costo esperado de todos los escenarios.

Variables de decisión: cantidad a adquirir en cada período
cantidad usada en cada período
cantidad a almacenar en el período

Datos: precio por unidad en el período
demanda en el período
costo de mantener producto en inventario en el período

(Subsubsubsubsection head:)Como Modelo de Programación Lineal Estocástica

Suponga que se tienen tres escenarios posibles, que se conoce los datos para el primer período, la probabilidad de ocurrencia de cada escenario y que la decisión en el primer período es independiente del escenario que ocurra en el segundo (propiedad de no anticipación). El futuro es incierto y la decisión de hoy no puede tomar ventaja del conocimiento del futuro.

(Subsubsubsubsection head:)Formulación verbal:

Minimizar el costo del primer período mas el el valor esperado del costo en el segundo período, sujeto a que se satisfaga la demanda en cada período y cada escenario adquiriendo producto o utilizando el almacenado. El producto que no se vende en un período se guarda para el período siguiente.

(Subsubsubsubsection head:)Variables de decisión:

○ $X_{i,j}$ = cantidad a adquirir en el período i dado el escenario j
○$Y_{i,j}$ = cantidad de producto almacenado que es vendido en el período i dado el escenario j
○$I_{i,j}$ = cantidad a almacenar en el período i dado el escenario j (I_0 es el inventario inicial conocido)

(Subsubsubsubsection head:)Datos:

○$C_{i,j}$ = precio del producto en el período i dado el escenario j
○$D_{i,j}$ = demanda en el período i dado el escenario j
○$A_{i,j}$ = costo de mantener en inventario e el período i dado el escenario j
○$P(j)$ = probabilidad de ocurrencia del escenario j

Dado que en el primer período solo hay un escenario posible (y cierto) notamos este como escenario 0.

(Subsubsubsubsection head:)Función Objetivo:

min $C_{1,0}X_{1,0} + A_{1,0}X_{1,0} + P(1)[C_{2,1}X_{2,1} + A_{2,1}X_{2,1}] + P(2)[C_{2,2}X_{2,2} + A_{2,2}X_{2,2}] + P(3)[C_{2,3}X_{2,3} + A_{2,3}X_{2,3}]$

sujeto a:

Primer período

$X_{1,0} + Y_{1,0} \geq D_{1,0}$
$I_{1,0} = I_0 + X_{1,0} - D_{1,0}$
$Y_{1,0} \leq I_0$

Segundo período (para cada excenario j)

$X_{2,j} + Y_{2,j} \geq D_{2,j}$
$I_{2,j} = I_{1,0} + X_{2,j} - D_{2,j}$
$Y_{2,j} \leq I_{1,0}$

Restricciones lógicas

$X_{i,j}$, $Y_{i,j}$, $I_{i,j}$ no negativos

1.1.2 Un Problema de Flujo en una Red

Formulación verbal: una refinería localizada en Newark(N.Y) envía la gasolina refinada a tanques de almacenamiento en Filadelfia a través de una red de oleoductos con estaciones de bombeo en Sayerville, Easton, Trenton, Bridgewater y Allentown. El oleoducto está construído en segmentos que conectan a estas ciudades.A lo largo de cada trayecto se tiene una cantidad máxima de galones de gasolina por hora que puede enviarse.Estas capacidades se muestran en la tabla siguiente:

De	a	Capacidad
Newark	Sayerville	150,000
Sayerville	Trenton	125,000
Trenton	Filadelfia	130,000
Newark	Bridgewater	80,000
Sayerville	Bridgewater	60,000
Bridgewater	Easton	100,000
Easton	Allentown	75,000
Easton	Trenton	50,000
Allentown	Filadelfia	90,000

Se espera un aumento de la demanda en Filadelfia para el próximo invierno.Antes de incrementar la tasa de producción la refinería desea saber el número máximo de galones que pueden enviarse a ravés de la red a los tanques de almacenamineto de Filadelfia.

○Variables de decisión:

○Función Objetivo:

○ Restricciones: