Propiedades del Modelo de Programación Lineal

El método Simplex utiliza la forma estándar del Modelo de Programación Lineal:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots.. + c_nx_n \\
\text{s.a.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \geq 0
\end{aligned} \qquad \#
$$

Sin pérdida de generalidad los coeficientes del segundo miembro pueden considerarse no negativos.

Sea

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},
$$
vectores de dimensión n, n y m respectivamente y

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix},
$$
la matríz de restricciones de dimensión $m \times n$.

El modelo puede escribirse en forma matricial

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = c^T x \\
s.a. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned} \qquad \#
$$

Siempre es posible convertir un Modelo Lineal a la forma estándar. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \max \ \ z &= 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ s.a.\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \ \ &irrestricta \end{aligned} \qquad \#$$

La primera y segunda restricción se convierten en igualdad agregando variables de holgura (no negativas)

w_1 y w_2, y se obtiene:

$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + w_1 = 50$

$x_1 + 2x_2 - x_3 - w_3 = 8$

La variable x_2 se reemplaza por $x_2' = -x_2$ y la variable x_3 por $x_3^+ - x_3^- = x_3$ con x_3^+ y x_3^- no negativas.

El Modelo se escribe entonces:

$$\begin{aligned} \max \ \ z &= 9x_1 - 2x_2' + 5x_3^+ - 5x_3^- \\ s.a.\ 4x_1 - 3x_2' + 6x_3^+ - 6x_3^- + w_1 &= 50 \\ x_1 - 2x_2' - 3x_3^+ + 3x_3^- - w_2 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2' + x_3^+ - x_3^- &= 5 \\ x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0, w_1 &\geq 0, w_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \#$$

Hiperplanos, Semiespacios y Poliedros

Se presentan algunas definiciones importantes que permiten entender el procedimiento que sigue el método Simplex para encontrar las soluciones del Modelo de Programación Lineal.

Hiperplano

Dado un vector $a \in R^n$ y un escalar α, un hiperplano en R^n es el conjunto definido por

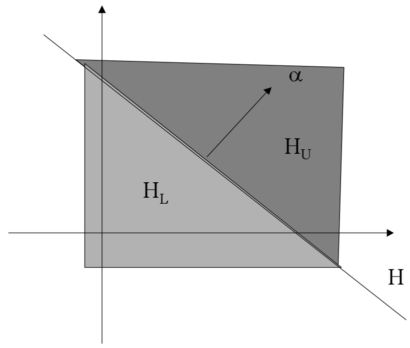
$H = \{x \in R^n \ | \ a^T x = \alpha\}$

En R^2 es una línea y en R^3 un plano

Semiespacios

Un hiperplano en R^n define dos semiespacios cerrados, como se muestran en la figura

$H_L = \{x \in R^n \ | \ a^T x \leq \alpha\}$ y $H_U = \{x \in R^n \ | \ a^T x \geq \alpha\}$



#

Poliedro

La intersección de un número finito de semiespacios cerrados define un Poliedro en R^n.

El conjunto factible de un Modelo de Programación Lineal es entonces un Poliedro

$$F_1 = \{x \in R^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$ #

definido por la intersección de los m semiespacios $Ax \leq b$ y los n semiespacios $x \geq 0$

Un poliedro no vacío y acotado se llama *Politopo*.

El conjunto factible del Modelo de Programación Lineal en forma estándar

$F_2 = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ es un poliedro definido por la intersección de los $2m + n$

semiespacios correpondientes a $Ax \leq b, Ax \geq b$ y $x \geq 0$ o de manera equivalente, por la intersección de los m hiperplanos $Ax = b$ y los n semiespacios $x \geq 0$.

Conjuntos afines y Conjuntos Convexos

Sean r vectores $x^1, x^2, ..., x^r$ en R^n y r escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$. La expresión

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_r x^r$$ #

es una combinación lineal de los r vectores.

Los vectores $x^1, x^2, ..., x^r$ son *Linealmente Dependientes* si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ no todos cero, tales que

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_r x^r = 0$$ #

Si (ref: !) solo se tiene cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0,$ se dice que los r vectores son *Linealmente Independientes*.

La combinación lineal (ref: !!) es una *Combinación Lineal Afín* si:

$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r = 1$

La combinación lineal (ref: !!) es una *Combinación Convexa si*:

$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r = 1$

$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_r \geq 0$

El conjunto de todas las combinaciones lineales afines de dos puntos $x_1, x_2 \in R^n$ es la recta

definida por esos dos puntos.

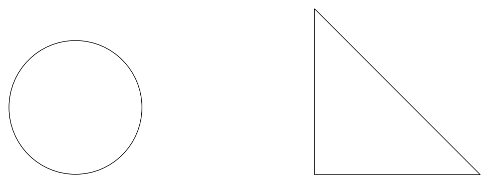
El conjunto de todas las combinaciones convexas de dos puntos $x_1, x_2 \in R^n$ es el segmento que une esos dos puntos.

Conjunto Afín

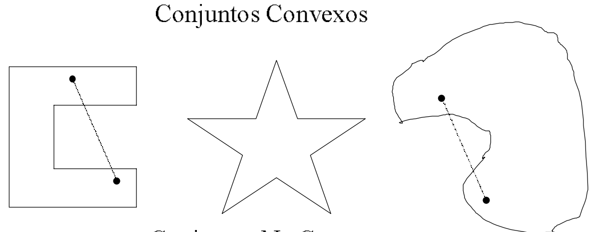
Un conjunto $S \in R^n$ es un *Conjunto Afín* si contiene a todas las combinaciones lineales afines de sus elementos.

Conjunto Convexo

Un conjunto $S \in R^n$ es un *Conjunto Convexo* si contiene a todas las combinaciones Convexas de sus elementos.



Conjuntos Convexos



Conjuntos No Convexos

#

Así, un *Conjunto Afín* es un *Conjunto Convexo* pero no todo *Conjunto Convexo* es un *Conjunto Afín*. Un hiperplano es un conjunto afín y convexo pero un semiespacio es un conjunto convexo que no es un conjunto afín.

La intersección de conjuntos afines es un conjunto afín.

La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Como un poliedro es la intersección de semiespacios y los semiespacios son convexos, un poliedro es un conjunto convexo.

Un Extremo de un Poliedro es un punto que no puede escribirse como combinación convexa de dos puntos distintos.

Envoltura Convexa

La Envoltura Convexa de un conjunto de puntos $x^1, x^2, ..., x^r$ en R^n es el conjunto que contiene a todas las combinaciones convexas de esos puntos. Es el convexo más pequeño que los contiene.

Un Politopo es la envoltura convexa de todos sus extremos.

Soluciones Básicas y Puntos Extremos

Mostramos la relación entre las soluciones factibles del Modelo de Programación Lineal y los puntos extremos del poliedro de las restricciones.

Sea $Ax = b$ un sistema lineal con matriz A de dimensión $m \leq n$ y de rango m, es decir que el conjunto de vectores fila de A es linealmente independiente o de manera equivalente, que existe al menos un conjunto de vectores columna de A linealmente independientes. La matriz A puede entonces descomponerse en dos bloques

$A = [B \mid N]$

donde B es una matriz $m \times m$ de rango m, es decir que B es no singular (tiene inversa) y N es es una matriz $m \times (n - m)$. La matriz B se llama matriz de base porque sus columnas (o sus filas) forman una base de R^n.

El vector x puede descomponerse entonces en

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

Los vectores x_B y x_N son llamados vector de base y vector no básico respectivamente; las variables incluídas en esos vectores (las componentes) se llaman variables básicas y no básicas respectivamente. El sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en función de estos vectores

$Bx_B + Nx_N = b$

Como B es no singular, el vector de base puede expresarse en función del vector no básico

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

En el caso especial en que $m = n$, el vector x_N es vacío y x_B tiene una única solución. En caso contrario, para cada conjunto de valores de x_N existe una única solución para x_B. Si $x_N = 0$, entonces $x_B = B^{-1}b$ y el vector

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una *solución básica*. Más aún, si $B^{-1}b \geq 0$, entonces x es una *solución básica factible* (*SBF*).

Como A tiene n columnas y es de rango m se tiene a lo mas $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ maneras de escoger m columnas para B y este es el número máximo de soluciones básicas.

¿Cuál es la relación entre estas soluciones básicas y el poliedro de las restricciones?

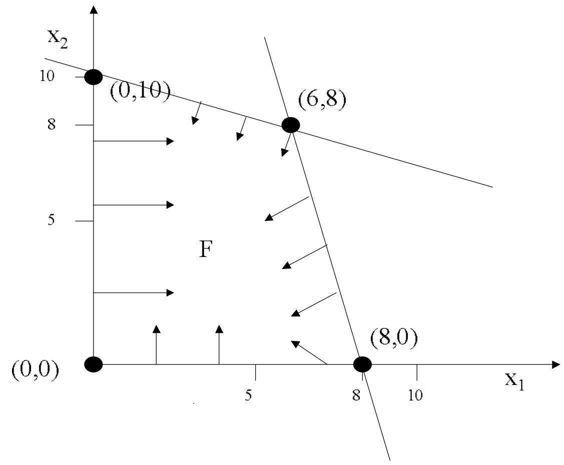
- El poliedro de las restricciones es: (en forma estándar)
  $F = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$
- Los extremos del poliedro ocurren solo en la intersección de n hiperplanos L.I. que forman la frontera de F; mas precisamente, se encuentran en la intersección de m hiperplanos L.I. de $Ax = b$ y $n - m$ hiperplanos $x_i = 0$.
- Un extremo es una SBF donde las variables no básicas corresponden a las variables que definen los n-m hiperplanos $x_i = 0$ y las variables básicas son de la forma $x = B^{-1}b$.
- Reciprocamente, a cada SBF le corresponde un extremo del poliedro de las restricciones.
- Dos extremos son adyacentes si el segmento que los une es un lado del poliedro.
- Dos extremos son adyacentes si las correpondientes SBF contienen $m - 1$ variables básicas comunes.

Ejemplo

Consideremos el siguiente Modelo de Programación Lineal en forma canónica

$$\begin{aligned} &\max \ \ x_1 + x_2 \\ &s.a \ \ x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ &4x_1 + x_2 \leq 32 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \#$$

La región factible del modelo (ref: ?) se muestra en la figura (ref: ??)



#

En forma estándar el modelo se escribe

$$\max \;\; x_1 + x_2$$
$$s.a \; x_1 + 3x_2 + w_1 = 30$$
$$4x_1 + x_2 + w_2 = 32 \qquad \#$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

Se tienen a lo más $\binom{4}{2} = 6$ soluciones básicas, es decir a lo más 6 extremos. A continuación se muestran las 6 submatrices de base y las soluciones básicas para el problema anterior.

De la matriz del modelo anterior $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ y el vector segundo miembro b= $\begin{bmatrix} 30 \\ 32 \end{bmatrix}$ consideramos las 6 submatrices de base y las soluciones básicas correspondientes

1. $B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, B_1^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{vmatrix}, B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \;\; x_1 = 6, x_2 = 8, w_1 = 0, w_2 = 0$ (Factible)
2. $B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, B_2^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}, B_2^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \end{bmatrix}, \;\; x_1 = 8, x_2 = 0, w_1 = 22, w_2 = 0$ (Factible)
3. $B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, B_3^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ -88 \end{bmatrix}, x_1 = 30, x_2 = 0, w_1 = 0, w_2 = -88$ (No Factible)
4. $B_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, B_4^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 32 \\ -66 \end{bmatrix}, x_1 = 0, x_2 = 32, w_1 = -66, w_2 = 0$ (No Factible)
5. $B_5 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, B_5^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}, B_5^{-1}b = \begin{bmatrix} 10 \\ 22 \end{bmatrix}, x_1 = 0, x_2 = 10, w_1 = 0, w_2 = 22$: (Factible)

6. $B_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, B_6^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, B_6^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 32 \end{bmatrix}, x_1 = 0, x_2 = 0, w_1 = 30, w_2 = 32$ (Factible)

7. De las 6 SB solo 4 son SBF y correponden a los extremos marcados en la figura ref: ??

Observemos que los extremos (8,0) y (6,8), que corresponden a las SBF $(8,0,22,0)$ y $(6,8,0,0)$ tienen en común $m-1 = 1$ variables básicas; en este caso la variable x_1 está en las dos bases.

No Degenerancia

La correspondenica entre soluciones básicas y extremos no es en general uno a uno.

- Cada SBF corresponde a un extremo
- Cada Extremo puede corresponder a más de una SBF

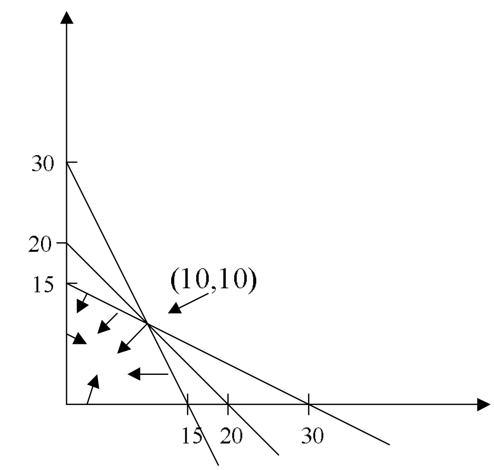
Ejemplo

Consideremos el siguiente conjunto de restricciones, donde m=3 y n=5

$$x_1 + x_2 + w_1 = 20$$
$$x_1 + 2x_2 + w_{21} = 30$$
$$2x_1 + x_2 + w_3 = 30$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

#

Se tienen a lo más 10 SB, 3 extremos y 4 SBF como se puede ver en la gráfica ref: ¿



#

Las SBF son:

$x^1 = (0,0,20,30,30)$ que corresponde al extremo (0,0)
$x^2 = (15,0,5,15,0)$ que corresponde al extremo (15,0)
$x^3 = (0,15,5,0,15)$ que corresponde al extremo (0,15)
$x^4 = (10,10,0,0,0)$ que corresponde al extremo (10,10)

En la solución x^4 hay una variable básica que es cero y que puede ser w_1, w_2 o w_3, por lo tanto a ese extremo le corresponden 3 SBF diferentes.

Si el número de variables básicas positivas es exactamente m la solución es no degenerada

En un modelo de PL con n variables y m restricciones, una SBF es degenerada si el número de variables básicas positivas es menor o igual a m-1.

La existencia de soluciones básicas degeneradas pueden causar problemas de convergencia del algoritmo; puede ocurrir que de una iteración a otra solo se cambie de base pero no de extremo.

Algoritmo Simplex

El algoritmo empieza en un extremo y se mueve a extremos adyacentes que mejoren el valor de la función objetivo.

El número máximo de extremos es $\binom{n}{m}$, si ningún extremo se repite de iteración a iteración (no hay degenerancia) el algoritmo termina despúes de un número finito de pasos.

Consideremos un modelo de PL en forma estándar en función de una Solución de Base Factible (extremo):

$$\begin{aligned} \max\ & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ s.a.\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{aligned} \qquad \#$$

En la solución actual $x_B = B^{-1}b, x_N = 0$. Para pasar a otro extremo debemos cambiar una columna de la matriz B por una columna de la matriz N; de esta manera la nueva base difiere de la actual en una variable básica y tenemos un extremo adyacente.Para determinar cuál es esta nueva columna observemos como cambia el valor de la función objetivo al introducir una nueva variable a la base. La SBF actual en función de las variables no básicas es:

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ y la función objetivo

$Z = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = c_B^T B^{-1}b - (c_B^T B^{-1}N - c_N)x_N$

El vector $c_B^T B^{-1}N - c_N$ tiene n-m componentes que notamos con $z_j - c_j$, con $j \in N$. y se llama vector de *costos reducidos* de las variables no básicas.

$z_j - c_j = c_B^T B^{-1}a_j - c_j$ donde a_j es una columna de la submatriz N.

Este valor representa el decremento en la función objetivo generado por una unidad de la variable x_j. Si todos los costos reducidos son no negativos, la solución actual es óptima, ya que cualquier incremento en las variables no básicas disminuye el valor de la función objetivo (en un problema de maximización).En caso de que exista algún costo reducido negativo, el incremento de la variable no básica correpondiente proporciona un valor mayor de la función objetivo.Elegimos entonces la variable no básica cuyo costo reducido sea más negativo, para que el incremento sea mayor. Sea x_k esta variable y a_k la columna de la submatriz N correspondiente. Al incrementar el valor de x_k todos los valores de las variables cambian.

El vector $\widehat{a}_k = B^{-1}a_k$ representa el decrecimiento de las variables básicas actuales cuando aumentamos la variable x_k en una unidad.

$x_{B_i} = (B^{-1}b)_i - (B^{-1}a_k)_i x_k = (B^{-1}b)_i - (\widehat{a_{ik}})x_k$ El valor de la variable x_k debe ser tal que una

variable básica actual se transforme en no básica (sea cero). Esto puede ocurrir para aquellas componentes de la columna $\widehat{a}_k$ que son positivos. Buscamos entonces el primer valor para el cual una x_{B_i} sea cero.

Esto ocurre cuando $\lambda = \min(\lambda_i = \frac{x_{B_i}}{\widehat{a}_{ik}} \mid \widehat{a}_{ik} > 0)$ donde $\widehat{a}_{ik}$ es la componente $i-$*ésima* del vector $\widehat{a}_k$.

Si el mínimo ocurre en $i = r$, esto es si $\lambda = \frac{x_{Br}}{\widehat{a}_{rk}}$ la variable x_k entra a la base con el valor $x_k = \lambda$.

La nueva SBF es :

$\widehat{x_{Bi}} = (nueva) = (B^{-1}b)_i - \widehat{a_{ik}} * \lambda$ para todo $i \neq r$

$\widehat{x_{Br}} = \lambda = x_k$

Esta operación se conoce como pivoteo.

La función objetivo cambia al valor:

$Z(nueva) = c_B^T B^{-1}b - (z_k - c_k)\lambda$
Si $\lambda > 0$, la función objetivo crece, si $\lambda = 0$, la nueva base es degenerada y la función objetivo no

cambia de valor. Nótese que esto ocurre cuando hay una variable de base (en la base anterior que es cero)

Si todos las componentes del vector columna a_k son no positivos y el costo reducido $z_k - c_k$ es negativo,cualquier valor de x_k positivo solo aumentaría el valor de las variables de base; no encontramos otro extremo pero la función objetivo sigue incrementándose. Esto implica que el problema no tiene solución acotada.

Nótese además que si extendemos el vector de costos reducidos a las variables básicas, estos son iguales a cero: si $j \in B$, la columna a_j es una columna de la matriz de base B y se tiene:

$z_j - c_j = c_B^T B^{-1} a_j - c_j = c_j - c_j = 0$

Ejemplo

max $x_1 + x_2$
s.a. $x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$
$4x_1 + x_2 + x_4 = 32$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, b = \begin{matrix} 30 \\ 32 \end{matrix}$$

Consideremos el extremo inicial (0,0) que corresponde a la SBF $x_B = (0,0,30,32)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix}, B^{-1}b = \begin{matrix} 30 \\ 32 \end{matrix}$$, y en ese extremo la función objetivo es

$Z = c_B^T x_B = 0$

En este caso $c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $z_j = c_B^T B^{-1} a_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ para toda columna $a_j \in N$.

Los costos reducidos de las variables no básicas son

$z_1 - c_1 = -c_1 = -1$
$z_2 - c_2 = -c_2 = -1$

Como ambos son negativos e iguales escogemos la variable $x_k = x_1$ para entrar a la base.

Entonces $\lambda = \min(\lambda_1 = \frac{30}{1}, \lambda_2 = \frac{32}{4}) = 8$, que corresponde a la variable x_4, y por lo tanto es la variable x_4 la que sale de la base.

$$\widehat{a_k} = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La nueva solución es ahora:

$x_1 = 8$
$x_2 = 0$
$x_3 = 30 - (a_{11} * 8) = 30 - (1 * 8) = 22$

$x_4 = 32 - (a_{21} * 8) = 32 - (4 * 8) = 32 - 32 = 0$

y la función objetivo toma el valor $\widehat{Z} = -(z_1 - c_{1)*}\lambda = 8$

La nueva matriz de base es ahora $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, B^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \end{bmatrix}$

$, N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$c_B^T B^{-1} N = [1,0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

y los costos reducidos de las variables no básicas son:

$\begin{bmatrix} z_2 - c_2 & z_4 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right]$

Solo hay un costo reducido negativo por lo tanto la variable que entra a la base es la $x_k = x_2$.

Para determinar cuál es la variable que sale de la base calculamos:

$\lambda = \min(\lambda_1 = \frac{8}{\frac{1}{4}}, \lambda_2 = \frac{22}{\frac{11}{4}}) = 8$ que corresponde a la variable x_3 y por lo tanto la variable x_3 sale de la base.

$\widehat{a_k} = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$

La nueva solución es ahora:

$x_1 = 8 - (\widehat{a_{12}} * 8) = 8 - (\frac{1}{4} * 8) = 6$

$x_2 = 8$

$x_3 = 22 - (\widehat{a_{22}} * 8) = 22 - (\frac{11}{4} * 8) = 0$

$x_4 = 0$

y la función objetivo toma el valor $\widehat{Z} = 8 - (z_2 - c_{2)*}\lambda = 8 - (-\frac{3}{4}) * 8 = 14$

La nueva matriz de base es ahora $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}, B^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix},$

$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_B^T B^{-1} N = [1,1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

y los costos reducidos de las variables no básicas son:

$\begin{bmatrix} z_3 - c3 & z_4 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \right]$

como todos los costos reducidos de las variables no básicas son no negativos la solución actual es la óptima.

Pasos del Simplex

1. Formular el modelo de PL en forma estándar
2. Seleccionar una solución de base factible (SBF) inicial
3. Seleecionar una variable no básica para entrar a la base y que mejore el valor de la función

objetivo. la que tiene el costo reducido más negativo. Si todos los costos reducidos de las variables no básicas son no negativos, la solución actual es óptima.

4. Seleccionar la variable básica que debe dejar la base, de manera que la nueva solución básica sea factible

5. cambiar la base mediante un pivoteo y evaluar la función objetivo en la nueva SBF

Tabla Simplex

	x_B	x_N	Solución
Z	0	$c_B^T B^{-1} N - c_N$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Ejemplo:

max $9x_1 + 12x_2$

s.a. $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 150$

$4x_1 + 2x_2 + x_5 = 160$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x5 \geq 0$

La primera SBF contiene las variables x_3, x_4, x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Sol	
	-9	-12	0	0	0	0	λ
x_3	4	3	1	0	0	180	60
x_4	2	3	0	1	0	150	50
x_5	4	2	0	0	1	160	80

El elemento pivote es 3, esto es la variable x_4 sale de la base y en su lugar entra la variable x_2

Para realizar el pivoteo: debemos transformar la columna 2 a $[0,1,0]^T$ y hacer cero el costo reducido correpondiente.

La fila 2 se divide por 3 para obtener la nueva fila 2

La nueva fila 0 (costos reducidos) se obtiene multiplicando la nueva fila 2 por 12 y sumandola a la fila 0 actual.

La nueva fila 1 se obtiene multiplicando la nueva fila 2 por 3 y restandola de la actual fila 1

La nueva fila 3 se obtiene multiplicando la nueva fila 2 por 2 restándola de la actual fila 3

Se tiene entonces la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Sol	
	-1	0	0	4	0	600	λ
x_3	2	0	1	-1	0	30	15
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	50	75
x_5	$\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	60	$\frac{45}{2}$

El nuevo elemento pivote es 2, es decir entra la variable x_1 y sale la variable x_3

La fila 1 se divide por 2 para obtener la nueva fila 1
La nueva fila cero se obtiene multiplicando la nueva fila 1 por 1 y sumandola a la actual
La nueva fila 2 se obtiene multiplicando la nueva fila 1 por 2/3 y restándola de la actual fila 2
La nueva fila 3 se obtiene multiplicando la nueva fila 1 por 8/3 y restándola de la actual fila 3

Se obtiene entonces la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Sol
	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	615
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	15
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	40
x_5	0	0	$-\frac{8}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	20

Como todos los costos reducidos son no negativos la SBF actual es la óptima.

Degenerancia

Para evitar ciclado en la presenica de una base degenerada, es decir cambiar de base pero no de extremo hay varios procedimientos. El más simple es el método de Bland (Bland R. "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method". Math. of Operations Research. Vol 2. pp 103-107, 1977.

1. Seleccionar para entrar a la base la variable no básica con el menor índice entre las que tienen costos reducidos negativos.
2. seleccionar para dejar la base la variable con el menor λ Si hay empate seleccionar la de menor índice

Solución Básica Factible Inicial

Cuando todas las restricciones tienen desigualdad $\leq$ escoger como primera SBF la que contiene a las variables de holgura.

En caso contrario agregar variables auxiliares en las restricciones que lo requieran (de igualdad o desigualdad $\geqq$) . Estas variables no tienen un significado especial y deben eliminarse de la base lo antes posible, penalizando a la función objetivo en estas variables.

Hay dos métodos para hacerlo:
Método de las dos fases.
Método de la M grande

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
&\max\ 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 \\
&\text{s.a. } 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 \leq 50 \\
&\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \geqq 8 \\
&\quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x4 = 5 \\
&\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Agregando variables de holgura para pasar a la forma estándar se tiene:

$$\begin{aligned}
&\max\ 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 \\
&\text{s.a. } 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 = 50 \\
&\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 8 \\
&\quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x4 = 5 \\
&\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

La variable $x4$ y la variable de hogura x_6 no pueden utilizarse como variables básica, entonces agregamos dos variables auxiliares $x_7 \geq 0$ y $x_8 \geq 0$.
La matriz de restricciones se escribe entonces:

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 = 50 \\
&\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 + x_7 = 8 \\
&\quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x4 + x_8 = 5
\end{aligned}$$

Método de las dos fases

Fase 1: resolver el modelo de PL siguiente:

$$\begin{aligned}
&\max\ \text{-x}_7 - x_8 \\
&\text{s.a.} \\
&4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 = 50 \\
&x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 + x_7 = 8 \\
&2x_1 + 4x_2 + x_3 - x4 + x_8 = 5 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0
\end{aligned}$$

Fase 2: tomar la SBF de la fase 1 y continuar con el método Simplex con la función objetivo original

Método de la M grande

Resolver el modelo de PL siguiente:

$\max\ 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 - Mx_7 - Mx_8$

s.a. $4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + x_5 = 50$

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 + x_7 = 8$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 - x4 + x_8 = 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0$

El método de las dos fases es más estable porque no trabaja con números grandes (escalamiento)

Casos Especiales

El modelo de PL puede tener:

1. Una única solución óptima
2. Varias soluciones óptimas
3. No soluciones factibles
4. Solución óptima no acotada
5. Soluciones degeneradas

¿Cómo detectar estos casos?

1. Todas las variables auxiliares son cero en la primera fase y los costos reducidos de variables no básicas son positivos en la segunda fase.

2. Al menos un costo reducido de variables no básicas es cero, cambia la base (extremo) pero no la función objetivo.

3. Una variable auxiliar no puede ser quitada de la base

4. Si no existe elemento pivote positivo

5. Hay un costo reducido de variable no básica negativo pero el correspondiente $\lambda = 0$(variable básica cero)

P ara observar esto basta con ver el cambio en las soluciones y en el valor de la función objetivo al cambiar de base

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$Z = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = c_B^T B^{-1}b - (c_B^T B^{-1}N - c_N)x_N$

$z_j - c_j = c_B^T B^{-1}a_j - c_j$ donde a_j es una columna de la submatriz N.

$\lambda = \min(\lambda_i = \frac{x_{B_i}}{\hat{a}_{ik}} \mid \hat{a}_{ik} > 0)$ donde $\hat{a}_{ik}$ es la componente $i - ésima$ del vector $\hat{a}_k$.

$\widehat{x_{Bi}} = (nueva) = (B^{-1}b)_i - \widehat{a_{ik}} * \lambda$ para todo $i \neq r$

$\widehat{x_{Br}} = \lambda = x_k$

$Z(nueva) = c_B^T B^{-1}b - (z_k - c_k)\lambda$