1 Dualidad y Sensibilidad

Para cada Programa Lineal se puede definir otro Programa Lineal asociado, que puede usarse para obtener la solución del programa original y proporciona información útil acerca de la solución óptima. Esta información puede usarse para realizar un análisis posterior de *sensibilidad* de esta solución a cambios en los coeficientes de la función objetivo, de los valores del segundo miembro de las restricciones y también analizar la posibilidad de agregar una nueva variable (y columna) al programa original. En lo que sigue el programa original se denominará Programa Primal (P) y el programa asociado Programa Dual (D).

Sea el Programa Primal en forma canónica:

$$\begin{array}{c} \max \;\; c^T x \\ s.a \;\; Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

El Programa Dual asociado es:

$$\begin{array}{c} \min \; w^T b \\ s.a \; w^T A \geq c^T \\ w \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

Notemos que se tiene exactamente una variable dual por cada restricción en el primal y una restricción en el dual por cada variable del primal.

1.0.1 Ejemplo:

se desea maximizar la utilidad por la venta de dos artículos que requieren mano de obra (MO) y proceso en dos máquinas (M1 y M2)

max $9x_1 + 12x_2$
s.a $4x_1 + 3x_2 \leq 180 \;\; (MO)$
$2x_1 + 3x_2 \leq 150 \;\; (M1)$
$4x_1 + 2x_2 \leq 160 \;\; (M2)$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

El programa dual asociado es:
min $180w_1 + 150w_2 + 160w_3$
s.a $4w_1 + 2w_2 + 4w_3 \geq 9$ (Producto 1)
$3w_1 + 3w_2 + 2w_3 \geq 12$ (Producto 2)
$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$

Las soluciones del programa dual son los precios marginales (precios sombra) asociados a cada recurso. Indican el incremento en la función objetivo del primal por cada unidad de aumento en la disponibilidad del recurso correspondiente.

Recordemos que la solución del programa primal es $x_1 = 15, x_2 = 40, (x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 20$ en las variables de holgura). La solución del programa dual pueden observarse en la fila de los costos reducidos de las variables no básicas de la tabla simplex $w_1 = 0.5, w_2 = 3.5, w_3 = 0$.

Para un programa en forma estándar

$$\begin{array}{c} \max \;\; c^T x \\ s.a \;\; Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

dado que las restricciones pueden espresarse con $Ax \leq b$ y -$Ax \geq -b$ el programa dual asociado es

$$\begin{array}{rl} \min & w_1^T b - w_2^T b \\ s.a & w_1^T A - w_2^T A \geq c^T \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{array}$$

, tomando $w = w_1 - w_2$, el programa se escribe:

$$\begin{array}{c} \min\ w^T b \\ s.a\ \ w^T A \geq c^T \\ w\ irrestricta \end{array} \tag{4}$$

1.0.2 Propiedad 1

El dual de un programa dual es el programa primal.

1.0.3 Formas mixtas

Cuando el programa que modela un problema tiene restricciones de diferentes tipos y variables restringidas o no en signo, el programa dual puede obtenerse transformando este programa primal a la forma canónica y utilizar la definición de programa dual anterior. Veamos un ejemplo.

Suponga que se tiene el programa primal siguiente:

max $c^T x$
s.a $A_1 x \leq b_1$
$A_2 x = b_2$
$A_3 x \geq b_3$
$x \geq 0$

Transformando este programa a la forma canónica se tiene
max $c^T x$
s.a $A_1 x \leq b_1$
$A_2 x \leq b_2$
-$A_2 x \leq -b_2$
- $A_3 x \leq -b_3$
$x \geq 0$
y el programa dual asociado es

min $w_1^T b_1 + w_2^T b_2 - w_3^T b_2 - w_4^T b_3$
s.a $w_1^T A_1 + w_2^T A_2 - w_3^T A_2 - w_4^T A_3 \geq c^T$
$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0$

Tomando $w_5 = w_2 - w_3$ y $w_6 = -w_4$ se tiene el siguiente programa dual asociado

min $w_1^T b_1 + w_5^T b_2 + w_6^T b_3$
s.a $w_1^T A_1 + w_5^T A_2 + w_6^T A_3 \geq c^T$
$w_1 \geq 0, w_2\ irrestricta, w_6 \leq 0$

Considerando que el dual del dual es el primal, a una variable irrestricta en el primal le correponde una restrición de igualdad en el dual y a una variable negativa en el primal le correponde una restricción ”mayor o igual en el dual. De manera general se tiene:

MAXIMIZACIÓN		MINIMIZACIÓN
Restricciones		Variables
$\leq$	$\Longleftrightarrow$	≥ 0
$\geq$	$\Longleftrightarrow$	≤ 0
=	$\Longleftrightarrow$	No restringida

Variables		Restricciones
≥ 0	$\Longleftrightarrow$	$\leq$
≤ 0	$\Longleftrightarrow$	$\geq$
No restringida	$\Longleftrightarrow$	$=$

1.1 Propiedades de los programas dual y primal

Consideremos los programas primal y dual siguientes:

Primal	Dual
$\max \ c^T x$	$\min \ w^T b$
$s.a \ \ Ax \leq b$	$s.a \ \ w^T A \geq c^T$
$x \geq 0$	$w \geq 0$

1.1.1 Propiedad 2

El valor de la función objetivo en cualquier solución factible $x \in R^n$ del programa primal es siempres menor o igual que el valor de la función objetivo del dual en cualquier solución factible $w \in R^m$.

Esto es, $c^T x \leq w^T b$.

1.1.2 Dem:

Si x, w son soluciones factibles del primal y del dual respectivamente entonces

$\begin{matrix} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} w^T A \geq c^T \\ w \geq 0 \end{matrix}$ entonces se tiene que $w^T Ax \geq c^T x$ y $w^T Ax \leq w^T b$, es decir

$c^T x \leq w^T b$.

De esta propiedad puede deducirse facilmente que.

1.1.3 Propiedad 2

Si x, w son soluciones factibles del primal y del dual respectivamente y los valores de las funciones objetivo de ambos problemas son iguales entonces ambas soluciones son óptimas para los respectivos problemas.

1.1.4 Propiedad 3

Si uno de los problemas no tiene solución óptima finita el otro problema no tiene soluciónes factibles

la propiedad anterior no es simétrica, es decir, un problema que no tiene soluciones factibles no necesariamente tiene un dual con solución no finita..

1.1.5 Ejemplo:

En los programas siguientes ninguno tiene solución factible

max $x_1 + x_2$
s.a $x_1 - x_2 \leq -1$
-$x_1 + x_2 \leq -1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

min $-w_{1-} w_2$
s.a $-w_1 + w_2 \geq 1$
$w_1 - w_2 \geq 1$
$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$

1.1.6 Condiciones de Optimalidad. Karush-Kuhn-Tucker

Si $(x, w) \in R^n \times R^m$ cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{array}{c} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ w^T A \geq c^T \\ w \geq 0 \\ w^T(Ax - b) = 0 \\ w^T(A - c^T)x = 0 \end{array}$$

entonces las soluciones son óptimas para P y D respectivamente

Notemos que la condiciones anteriores indican que si en el primal la solución óptima satisface una restricción con desigualdad estricta entonces la solución correpondiente del dual debe ser cero.

Esras condiciones son necesarias y suficientes para que se tenga el óptimo

Cualquier par de programas duales cumple alguna de las condiciones siguientes en sus soluciones:

PRIMAL	DUAL
Factible	Factible
No finita	No factible
No factible	No factible
No factible	No finita

Es decir, no se tiene estricta simetría en estas situaciones.

1.1.7 Teorema Fundamental de Dualidad

Dado un par de programas duales, exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta:

1. Ambos problemas tienen soluciones óptimas x^* y w^*,con $c^T x^* = {w^*}^T b$
2. Uno de los problemas tiene valor objetivo óptimo no finito (solución no acotada), en cuyo caso el otro no tiene solución factible
3. Ambos problemas son no factibles

1.1.8 Solución del Dual en la Tabla Simplex

Consideremos el problema primal en forma canónica

$$\begin{array}{rl} \max & c^T x \\ s.a & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

, donde A es una matríz m$\times n$, m$\leq n$ y de rango m

La tabla del simplex agrega m variables de holgura, de manera que se tienen n+m variables en el problema en forma estándar, que es la forma que utiliza el simplex. En la solución óptima se tiene m variables de base y n-m variables no básicas. Además los costos reducidos de las variables no básicas son no negativos:

$z_j - c_j = c_B^T B^{-1} a_j - c_j \geq 0$,para j$\in N, j = 1, ..., n - m$

y los costos reducidos de las variables básicas son cero ya que las columnas $a_i, i \in B$,por lo que el vector $B^{-1} a_i = e_i$, un vector unitario con ceros en cada componente y 1 en el lugar i. Entonces $c_B^T B^{-1} a_i - c_i = c_B^T e_i - c_i = 0$.

Si notamos $w = c_B^T B^{-1}$,se tiene que $w a_j - c_j \geq 0$,esto es $w a_j \geq c_j$ para todo j y el vector w cumple con las restricciones del dual.

Por otra parte en las columnas correspondientes a las m variables de holgura $c_{n+j} = 0$, $a_{n+j} = e_j$ y $w e_j - c_{n+j} \geq 0, j = 1, ..., m$,esto es $w_j \geq 0$ para $j = 1, ..., m$.

Entonces el vector $w = c_B^T B^{-1}$ es una solución factible para el dual.

Por otra parte, dado que $x_B^* = B^{-1} b$

$w^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x^*$ y se tiene que el vector $w = c_B^T B^{-1} = w^*$ es una solución óptima del dual.

Cuando no se tiene una solución factible inicial del primal y no se quiere agregar variables auxiliares una opción es encontrar una solución factible para el dual (pero no para el primal) y trabajar desde el dual.

1.1.9 Uso del Dual para resolver el Primal

Consideremos el siguiente problema primal:

min $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$

s.a $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$

$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

el problema dual asociado es

max $4w_1 + 3w_2$

s.a $w_1 + 2w_2 \leq 2$

$w_1 - 2w_2 \leq 3$

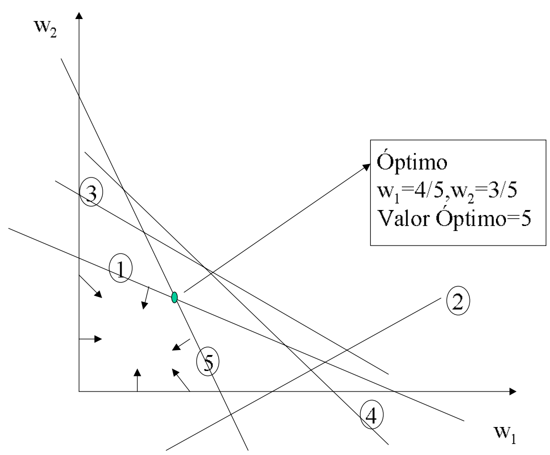
$2w_1 + 3w_2 \leq 5$

$w_1 + w_2 \leq 2$

$3w_1 + w_2 \leq 3$

$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$

Como el problema dual tiene dos variables puede resolverse gráficamente como se muestra en la figura



(5)

Entonces podemos concluir que $Z^* = 5$,utilizando las condiciones de complementariodad sabemos que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$,porque las restricciones que no son activas en el dual corresponden en el primal a estas variables. Como $w_1^*, w_2^* > 0$,se tiene que $x_1 + 3x_5 = 4$ y $2x_1 + x_5 = 5$,de donde se tiene que $x_1^* = 1, x_5^* = 1$.

1.1.10 Interpretación Económica del Dual

Dados los problemas duales siguientes

$$\begin{array}{ll} \max \ c^T x & \min \ w^T b \\ s.a \ \ Ax \leq b & s.a \ \ w^T A \geq c^T \\ x \geq 0 & w \geq 0 \end{array}$$

Si B es la base óptima para el primal se tiene que

$Z^* = c_B^T B^{-1} b = w^* b$ de donde se puede observar que:

$\frac{\partial Z^*}{\partial b} = c_B^T B^{-1} = w^*$

Así se observa que la componente w_i^* representa la velocidad de cambio del valor de la función objetivo ante un incremento unitario en el valor $i-ésimo$ del lado derecho de la restricción. Como $w_i^* \geq 0$, el valor de la función objetivo crecerá o se mantendrá constante ($w_i^* = 0$) conforme b_i crece.

El vector w^* son los precios marginales del segundo miembro. Si la i-ésima restricción representa una disponibilidad de recurso de a lo más b_i del i-ésimo recurso y $c^T x$ la utilidad total, entonces w_i^* representa la utilidad incremental de utilizar una unidad más de ese recurso. Es decir, es el precio que debería pagarse por una unidad más de ese recurso.

Se puede interpretar económicamente el problema dual completo. Supongamos que se paga a un tercero por los recursos $b_1, b_2, ..., b_m$ que la empresa requiere. Para producirlos esta empresa incurre en costos y desea minimizar su costo total. Debe entonces ea pagar el precio unitario justo w_i

1.1.11 Análisis de Sensibilidad

El cambio en el valor de la función objetivo ante cambios en los parámetros puede verse analizando la solución óptima w^* y la base óptima B.

Cambio en b

Si se cambia el segundo miembro de b a $\overline{b}$=$b + \Delta b$ se tiene un nuevo valor $\widehat{x_B} = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b$, si este valor es no negativo seguirá siendo óptima porque el cambio en el valor de b no afecta la condición de optimalidad. Veamos esto en el ejemplo anterior.

Se tiene que en la solución óptima la inversa de la matriz de base es:

B^{-1}= $\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{matrix}$,si se cambia $b = \begin{matrix} 180 \\ 150 \\ 160 \end{matrix}$, por $\overline{b} = \begin{matrix} 170 \\ 150 \\ 160 \end{matrix}$, la solución cambia a $\widehat{x_B} = B^{-1}b - B^{-1}\overline{b} =$ $\begin{matrix} 15 \\ 40 \\ 20 \end{matrix} - \begin{matrix} 5 \\ -\frac{10}{3} \\ -\frac{40}{3} \end{matrix} = \begin{matrix} 10 \\ 43.3 \\ 33.3 \end{matrix} \geq 0$. ¿Cuanto debería ser el cambio para que la nueva solución no sea factible?

$$\widehat{x_B} = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = \begin{matrix} 15 \\ 40 \\ 20 \end{matrix} + B^{-1} \begin{matrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 15 \\ 40 \\ 20 \end{matrix} + \begin{matrix} \frac{1}{2}d_1 \\ -\frac{1}{3}d_1 \\ -\frac{4}{3}d_1 \end{matrix} = \begin{matrix} 15 + \frac{1}{2}d_1 \\ 40 - \frac{1}{3}d_1 \\ 20 - \frac{4}{3}d_1 \end{matrix}$$

Entonces si $d_1 = -30, d_1 = 120$ o $d_1 = 15$, la nueva solución no será factible. estos valores definen el intervalo en el cual la solución dual indica un cambio marginal en la función objetivo. En este caso, un cambio en la disponibilidad del primero recurso indica un cambio en el valor objetivo óptimo mientras el cambio se encuentre en el intervalo [-30,15]. Esto es, a lo más puede aumentarse el recurso de 180 a 180+15=195 o decrecer de 180 a 180-30=150. (ver corrida de LINDO)

De igual manera un cambio en alguno de los coeficientes de la función objetivo cambiará el valor óptimo pero la solución óptima seguirá siendo la misma siempre y cuando el cambio no implique que el costo reducido de alguna variabe no básica sea cero. En el ejemplo:

Supongamos que los coeficientes de la función objetivo cambian de $\begin{matrix} c_1 = 9 \\ c_2 = 12 \end{matrix}$ a $\begin{matrix} 9 + d \\ 12 \end{matrix}$. Los coeficientes correpondientes a las variables básicas son entonces $\widehat{c}_B^T$ = $\begin{matrix} 9 + d \\ 12 \\ 0 \end{matrix}$ y

$$\widehat{c}_B^T B^{-1} = c_B^T B^{-1} + B^{-1} \begin{matrix} d \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.5 \\ 3.5 \\ 0 \end{matrix} + \begin{matrix} \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.5 + \frac{d}{2} \\ 3.5 - \frac{d}{2} \\ 0 \end{matrix}$$

Los costos reducidos para las variables no básicas x_3 y x_4,que tienen columnas unitarias $e_3 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ y $e_4 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ y coeficientes iguales a cero en la función objetivo son entonces:

$$\widehat{c}_B^T B^{-1} e_3 - 0 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} 0.5 + \frac{d}{2} \\ 3.5 - \frac{d}{2} \\ 0 \end{matrix} = 0.5 + \frac{d}{2}$$

$$\widehat{c}_B^T B^{-1} e_4 - 0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 + \frac{d}{2} \\ 3.5 - \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 3.5 - \frac{d}{2}$$

y serán cero si $d = -1$ o $d = 7$ por lo tanto se tendrá la misma solución óptima siempre que el coeficiente aumente no más de 7 y disminuya no menos de 1. Ver corrida de LINDO.

De igual manera se puede ver que si se decidiera agregar un nuevo producto que requiriera recursos en cantidades $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ respectivamente, el costo reducido de la nueva variable, que no estaría en un principio en la base, sería:

$$c_B^T B^{-1} a_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 3.5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - c_3 = 9 - c_3$$

Por lo tanto si la utilidad es menor a nueve la producción no cambia, no es rentable producirlo. Si su utilidad es mayor a nueve el costo reducido de esa variable es negativo y por lo tanto deberá continuarse con una nueva iteración del Simplex para encontrar la producción óptima.

1.1.12 Dual Simplex

El método Dual Simplex resuelve el problema dual directamente sobre la tabla primal. En cada iterción el método se mueve de una solución básica factible del dual a otra mejor hasta alcanzar la optimalidad del dual (y por lo tanto del primal) o hasta detectar que el dual no tiene solución finita y por lo tanto el primal no tiene solución factible.