1 PROGRAMACIÓN ENTERA

Es una extensión de la Programación Lineal que admite variables que están restringidas a tomar únicamente valores enteros. El caso más evidente es cuando el problema es entero por naturaleza: número de aviones a adquirir, número de embarques, etc. Sin embargo existen muchos problemas que no son de naturaleza entera pero que admiten una formulación con variables enteras. Algunas aplicaciones a la Ingeniería Industrial tales como secuenciación de la producción, programación de tareas, localización de planta, redes logísticas, balanceo de líneas de producción, asignación de recursos son generalmente planteados con modelos lineales que utilizan variables enteras. Los modelos que incluyen variables enteras son teóricamente y prácticamente más difíciles que los de programación lineal por varias razones. La formulación del problema puede ser en principio correcta pero en la práctica son irresolubles.No existe una metodología particular apropiada a todos los problemas. Los métodos generales toman en cuenta la estructura particular del problema. Algunos algoritmos genéricos son: Ramificación y Acotamiento (branch-and-Bound), Planos Cortantes, Relajación Lagragiana, pero no son todas. Estos modelos proporcionan soluciones óptimas o a veces buenas soluciones en un tiempo de cómputo adecuado si el problema no es muy grande. Algunos métodos teóricamente convergen (aún en un número finito de pasos) pero no obtienen una solución razonable en un tiempo computacional razonable.

Un modelo lineal en el cual todas las variables involucradas son enteras es un modelo de Programación Entera Pura, si solo algunas variables son enteras es un modelo de Programación Entera Mixto.

Algunos de los aspectos que pueden incorporarse en un modelo lineal a través de variables enteras son:

- Cantidades Enteras
- Decisiones del tipo ”hacerlo o no”
- Condicionantes que limitan el rango de una variable contínua. Variables indicadoras
- Restricciones de elección múltiple
- Restricciones lógicas

1.1 Formulación de Modelos de Programación Entera

Una formulación estándar de un programa Mixto Entero es:

$$\begin{array}{c} \max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{p} h_k y_k \\ s.a \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{p} G_{ik} y_k \le b_k \;\; \forall i \\ x_j, y_k \ge 0, x_j \text{ entera} \end{array} \tag{1}$$

en forma matricial:

$$\begin{array}{c} \max \quad c^T x + h^T y \\ s.a \;\; Ax + Gy \le b \\ x, y \ge 0, x \text{ entera} \end{array} \tag{2}$$

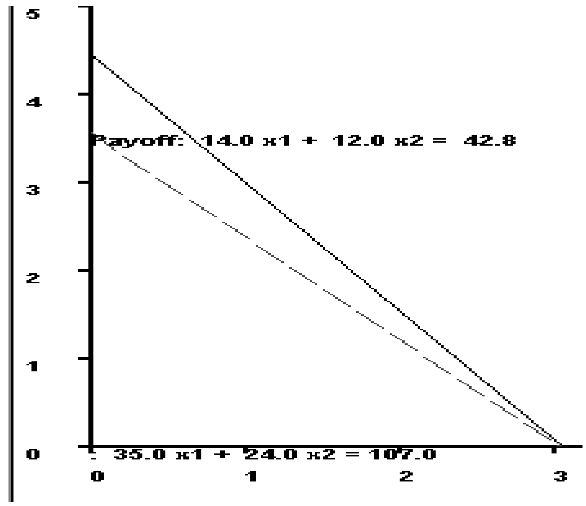
1.2 Cantidades Enteras

Un ejemplo de Programa Entero Puro es el de un jardinero que necesita 107 libras de un fertilizante que puede adquirirse en bolsas de 35 libras a un precio de \$14 la bolsa o en bolsas de 24 libras a un precio de \$12 la bolsa. El modelo se describe entonces:

$$\begin{array}{c} \min \;\; 14x_1 + 12x_2 \\ s.a \quad 35x_1 + 24x_2 \ge 107 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{y enteras} \end{array} \tag{3}$$

Las variables son enteras porque solo se pueden comprar bolsas completas. Si se resuelve el problema ”relajado”, es decir, sin restringir las variables a ser enteras, es fácil ver que la libra de fertilizante cuesta \$0.40 en bolsas de 35 libras y \$0.5 en bolsas de 24. le conviene más entonces, en términos de costo por libra, comprar 3.06

”bolsas” de 35 libras, con un costo total de \$42.8. Si se toma en cuenta que no se pueden adquirir fracciones de bolsa, la solución óptima es comprar una sola bolsa de 35 libras y 3 de 24 libras con un costo total de \$50. Como puede verse la solución es radicalmente distinta.



(4)

Obsérvese que no siempre es posible redondear la solución relajada para obtener una buena solución del problema entero. Cuando el problema involucra cantidades pequeñas se puede cometer errores muy grandes si se redondea la solución relajada. No ocurre lo mismo si el problema involucra cantidades grandes. Supongamos que en lugar de un jardinero el interesado es un granjero que requiere al menos 1070 libras de este fertilizante. La solución del problema relajado en este caso es $x_1 = 30.6, x_2 = 0$,con un costo total de \$428.4 y la solución del problema entero es $x_1 = 30, x_2 = 1$ con un costo total de \$432. Si se redondea la solución relajada a comprar 31 bolsas de 35 libras se tiene como costo total \$434 que no difiere mayormente de la solución óptima. En el caso del jardinero podría redondear a 4 bolsas de 35 libras o a 3 bolsas de 35 libras y una de 24, con costos totales de \$56 y \$54 respectivamente.

1.3 Decisiones del tipo ”hacerlo o no”

Decisiones de este tipo incluyen ”comprar o no una nueva máquina”, ”cerrar o no un almacén”, etc. Este tipo de decisiones se modelan con variables binarias, es decir variables enteras que solo pueden tomar el valor 0 o 1.

1.4 Problema de la mochila

Se trata de un problema de seleccionar un conjunto de artículos que deben ser cargados en una ”mochila” (camiones, almacenes) dado el valor del artículo y una cota superior del peso total a cargar.

La formulación general es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_j c_j x_j \\ s.a \quad & \sum_j a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{5}$$

donde c_j representa el valor del artículo, a_j el peso de cada artículo j, x_j la decisión de incluirlo o no y b el peso total posible.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x_1 + 17x_2 + 14x_3 + 11x_4 + 9x_5 \\ s.a \quad & 29x_1 + 20x_2 + 16x_3 + 12x_4 + 10x_5 \leq 37 \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{6}$$

Si resolvemos el problema relajado considerando que $0 \leq x_j \leq 1$, la solución es $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{8}{12}, x_5 = 0$,con un valor de la función objetivo de 37.33. Si se redondea hacia abajo con la solución

(1,0,0,0,0) se tiene un valor de la función objetivo de 31. La solución entera es sin embargo (0,1,1,0,0) con un valor de la función objetivo de 30.

la estructura general del problema de la mochila es tal que todos los coeficientes de la función objetivo y de las restricciones son no negativos con restricciones de ”menor o igual” si se trata de un problema de maximización y de ”mayor o igual” si se trata de un problema de minimización.

Los problemas de mochila con una sola restricción pueden resolverse eficientemente con algoritmos especiales en la práctica, aunque como problemas enteros son difíciles. Una generalización del problema de la mochila (mochila multidimensional) suele resolverse como problemas lineale redondeando la solución óptima. Problemas de este tipo aparecen en asignación de capitales o cargas de camiones.La estructura es de la forma:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.a\ \ Ax \leq b \\ &x \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo: Se está evaluando cinco proyectos en un período de planeacióndе tres años. Se conoce la utilidad y el costo esperado anual de cada proyecto, así como el monto total con el que se cuenta para invertir en estos cinco proyectos. Se desea determinar que proyectos se deben realizar a lo largo de los tres años de manera de maximizar las utilidades. Los datos son los siguientes:

	Egresos(millones/año)			
Proyecto	Año1	Año 2	Año 3	Utilidades
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos Disponibles	25	25	25	

El modelo se expresa entonces:

$$\begin{aligned} \max\ \ &20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5 \\ s.a\ &5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25 \\ &x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25 \\ &8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{8}$$

La solución óptima es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$ con un valor de la función objetivo de 95 millones de dólares. La solución del programa Lineal relajando la restricción en las variables a $0 \leq x_i \leq 1$ es $x_1 = 0.5789, x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0.7368$ con un valor de la función objetivo de 108.68. Esta solución no tiene sentido. Si se redondearan los valores reales a enteros, se tendría por ejemplo $x_1 = x_5 = 1$ que no es factible porque se violan restricciones.

1.5 Variables Indicadoras.

1.6 Costo o Cargo Fijo

La variable refleja costos fijos asociados a un rango dado de variables continuas.

Consideremos el siguiente ejemplo: Las compañías telefónicas ofrecen diferentes tarifas en su servicio de larga distancia. La compañia A cobra una tarifa fija de 16 dólares al mes, mas 0.25 centavos por minuto, T cobra 25 dólares al mes y 0.21 centavos el minuto, I cobra una tarifa mensual de 18 dólares y 0.22 por minuto. El usuario hace en promedio 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes.

Suponiendo que la tarifa fija se pague solo si se hacen llamadas por medio de una de estas compañías y que pueda distribuir sus llamadas entre las tres compañías ¿cómo debería utilizar el servicio de las tres compañías de manera de minimizar el costo mensual?

Considerando las siguiente variables:

$x_A =$ minutos de larga distancia con la compañía A
$x_T =$ minutos de larga distancia con la compañía T
$x_I =$ minutos de larga distancia con la compañía I
$y_A = 1$ si $x_A > 0$ y $y_A = 0$ si $x_A = 0$
$y_T = 1$ si $x_T > 0$ y $y_T = 0$ si $x_T = 0$
$y_I = 1$ si $x_I > 0$ y $y_I = 0$ si $x_I = 0$

para asegurar que $y_j = 1$ cuando $x_j > 0$ podemos colocar una restricción $x_j \leq My_j$ donde M es un valor suficientemente grande que no limite artificialmente el valor de x_j. Dado que en promedio el usuario hace 200 minutos de llamadas de larga distancia podemos poner $M = 200$.

El modelo se escribe entonces:

$$\begin{array}{c} \min\ 0.25x_A + 0.21x_T + 0.22x_I + 16y_A + 25y_T + 18y_I \\ s.a\quad x_A + x_T + x_I = 200 \\ x_A \leq 200y_A \\ x_T \leq 200y_T \\ x_I \leq 200y_I \\ x_A, x_T, x_I \geq 0 \\ y_A, y_T, y_I \in \{0,1\} \end{array} \tag{9}$$

De esta manera la tarifa fija solo se aplica si se utiliza esa compañía. La solución óptima en este caso es $x_I = 200, y_I = 1$, y todas las demás variables con valor cero.

La formulación general de un problema de cargo fijo es:

$$\begin{array}{c} \min\ c^T x + d^T y \\ s.a\ Ax \leq b \\ x \leq My \\ x \geq 0, y \in \{0,1\} \end{array} \tag{10}$$

1.6.1 Problema de Cubrimiento

El siguiente caso es un ejemplo típico de una clase importante de problemas enteros.

Ejemplo: Una región desea establecer el número mínimo de estaciones de bomberos que puedan atender a 6 ciudades de la región de manera que de al menos una de las estaciones pueda llegarse a cada ciudad en no más de 15 minutos. El tiempo (en minutos) que se requiere para pasar de una ciudad (C_i) a otra se muestra en la tabla:

		Hacia					
		C1	C2	C3	C4	C5	C6
	C1	0	10	20	30	30	20
	C2	10	0	25	35	20	10
De	C3	20	25	0	15	30	20
	C4	30	35	15	0	15	25
	C5	30	20	30	15	0	14
	C6	20	10	20	25	14	0

Las variables de decisión para este problema son del tipo $x_i = \begin{cases} 1 \text{ si} \quad \text{se construye estación en la ciudad } i \\ 0 \text{ si no se construye estación en la ciudad } i \end{cases}$ para $i = 1, ..., 6$
y la función objetivo es
$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
para asegurar que cualquier ciudad podrá ser atendida en a lo más 15 minutos de al menos alguna estación observamos qué ciudades se encuentran a una distancia tal que a lo más en 15 minutos puede alcanzarse y colocar una estación en al menos una de ellas.
C1 desde C1 yC2
C2 desde C1, C2 y C6
C3 desde C3 y C4
C4 desde C3, C4 y C5

C5 desde C4, C5 y C6
C6 desde C2, C5 y C6

de manera que las restricciones que se requieren son

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 + x_2 & & & & & & \geq 1 \\
x_1 + x_2 & & & & & +x_6 & \geq 1 \\
& x_3 + x_4 & & & & & \geq 1 \\
& x_3 + x_4 + x_5 & & & & & \geq 1 \\
& & x_4 + x_5 + x_6 & & & & \geq 1 \\
x_2 & & & +x_5 + x_6 & & & \geq 1
\end{array}
$$

$x_i \in \{0,1\}\ \ i = 1,...,6$

la solución óptima es Z=2, es decir, solo se deben colocar dos estaciones de bomberos y $x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0, x_2 = x_4 = 1$, una en C2 y otra en C4.

1.7 Condiciones del tipo "al menos uno"

Con frecuencia se tienen problemas en lo cuales se debe incluir dos restricciones de la forma

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq 0$

$g(x_1,x_2,......,x_n) \leq 0$

con la condición que al menos una de ellas se satisfaga.

Esto puede lograrse incluyendo en el modelo dos restricciones de la forma

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq My$

$g(x_1,x_2,......,x_n) \leq M(1-y)$

donde y es una variable binaria y m es una constante con valor suficientemente grande como para que se asegure que las restricciones

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq M$ y $g(x_1,x_2,......,x_n) \leq M$ se satisfagan para todos los valores de $x_1,x_2,......,x_n$ factibles para las otras restricciones del modelo.

Si $y = 0$ estas restricciones son de la forma

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq 0$

$g(x_1,x_2,......,x_n) \leq M$

indicando que la primera se cumple y posiblemente la otra también (la condición es "al menos una")

Si $y = 1$ estas restricciones son de la forma

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq M$

$g(x_1,x_2,......,x_n) \leq 0$

indicando que la segunda se cumple y posiblemente la primera también.

Ejemplo: en un problema de producción se tiene como restricción la siguiente condición:"si se produce el artículo i la cantidad mínima debe ser $x_i = 1000$". Esto se describe por $x_i \leq 0$ o $x_i \geq 1000$

Incluyendo una variable binaria y_i esta condición puede escribirse:

$x_i \leq My_i$

$1000 - x_i \leq M(1-y_i)$

donde el valor de M debe asegurar que no se hace infactibles otras restricciones del problema que incluyen la variable $x_{i.}$

1.8 Condiciones del tipo "si..... entonces"

En algunos problemas se debe incluir la condición tal que si una restricción $f(x_1,x_2,......,x_n) > 0$ se satisface entonces debe satisfacerse $g(x_1,x_2,......,x_n) \geq 0$,pero si $f(x_1,x_2,......,x_n) > 0$ no se satisface entonces $g(x_1,x_2,......,x_n) \geq 0$ puede o no ser satisfecha.

En este caso se puede incluir en el modelo las restricciones siguientes:

$-g(x_1,x_2,......,x_n) \leq My$

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq M(1-y)$

donde y es una variable binaria y M es una constante positiva suficientemente grande como para que

$-g(x_1,x_2,......,x_n) \leq M$

$f(x_1,x_2,......,x_n) \leq M$

se satisfacen para todos los valores de x_1,x_2,......,x_n factibles para las demás restricciones del problema.

La restricción $f > 0$ solo se satisface si $y = 0$,entonces $g \geq 0$ y se cumple la condición

Si $f > 0$ no se satisface entonces puede ser que $y = 0$ o $y = 1$ y la condición se cumple o no.

Ejemplo: Supongamos que en un cierto problema se tiene la siguiente condición: “si el cliente i es abastecido por el almacén $j = 2$, no puede ser abastecido por otro almacén $j = 1, 3, 4, 5$. Si x_{ij} es una variable binaria

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el cliente i es abastecido por el almacén j} \\ 0 \text{ si el cliente i no es abastecido por el cliente j} \end{cases}$$

esta condición se escribe

Si $x_{i2} = 1$ entonces $x_{i1} = x_{i3} = x_{i4} = 0$

Definiendo $f = x_{i2}$ y $g = -x_{i1} - x_{i3} - x_{i4}$ la condición se expresa a través de las restricciones

$x_{i2} \leq M(1 - y)$ y $x_{i1} + x_{i3} + x_{i4} \leq My$

Así si $x_{i2} = 1$ la variable $y = 0$ y $x_{i1} + x_{i3} + x_{i4} \leq 0$, obligando a que estas variables solo tomen el valor cero.