1 Métodos de Solución para Modelos de Programación Entera Pura, Mixta y Programación 0-1

A diferencia de los Modelos Lineales Continuos, para los cuales el método Simplex es aún el más usado, existen varios algoritmos para resolver Modelos Enteros que desafortunadamente no siempre son computacionalmente eficientes. El desempeño de cada uno depende esencialmente de la estructura y del tamaño del problema.

Se tienen esencialmente tres tipo de algoritmos para Programación Entera:

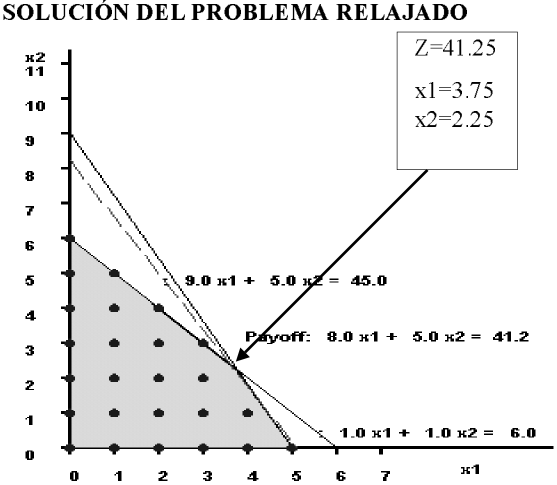
- Métodos de Planos Cortantes
- Métodos de Enumeración
- Métodos de Particionamiento
- Métodos de Relajación Lagrangiana

Consideremos el siguiente Modelo de Programación Entera:

$\max 8x_1 + 5x_2$
s.a $x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
x_1, x_2 enteros no negativos

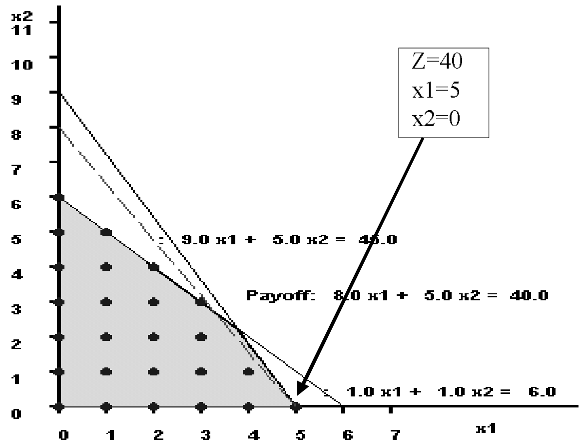
En las siguientes figuras puede observarse la solución del problema relajado (eliminando la restricción a ser enteras) y la del problema entero

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA RELAJADO



(1)

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ENTERO



(2)

Obsérvese que la Solución del Problema Relajado (Z=41.25) es una cota superior de la solución del Problema Entero (Z=40)

El método de Planos Cortantes consiste en crear nuevas restricciones (cortes) para el problema contínuo de manera que el problema resultante (continuo) tenga la misma solución que el problema entero.

Existen diferentes enfoques. En algunos métodos se trabaja con la tabla Simplex conteniendo solo elementos enteros y se mantiene esta condición hasta obtener la solución (Gomory, 1960; Glover,1968;Young,1968) y se aplican a problemas enteros puros. El algoritmo de Gomory comienza con una solución factible para el dual del problema relajado , pero no factible para el primal y utiliza el dual Simplex hasta obtener la solución.

En los métodos de Glover y Young la solución inicial es una solución factible entera y utiliza el Simplex para encontrar la solución (agregando planos cortantes adecuados durante el curso del proceso). La ventaja de estos últimos es que si el tiempo computacional es muy elevado se puede interrumpir el proceso y se tendrá una solución factible entera, lo que no ocurre con el método de Gomory.

Existen otros métodos de planos cortantes donde no se requiere que los elementos de la tabla sean enteros. Gomory ha desarrollado alguno de estos métodos uno de los cuales es aplicable a problemas enteros puros (1960) y otro a problemas enteros puros o mixtos (1963).

Los Métodos de Enumeración pueden subdividirse en dos tipos, generalmente llamados de Ramificación y Acotamiento (Branch-and Bound) y de Búsqueda o de Enumeración Implícita.

El método de Ramificación y Acotamiento es propuesto por Land y Doig (1960), posteriormente Dankin (1966) modifica este método. Este es el método más usado hoy en día y es el que contienen la mayoría de los paquetes comerciales. Consiste en enumerar todas las soluciones posibles enteras explícita o implícitamente, para ir encontrando soluciones factibles enteras y guardando la mejor. Cada solución encontrada es comparada con la siguiente generada. Un conjunto de soluciones se dice ”implícitamente enumerado” si se puede mostrar que ese conjunto no contiene soluciones mejores que la mejor obtenida hasta ese momento. Por lo tanto no es necesario evaluarlas de manera individual (explícitamente). Este conjunto se obtiene mostrando que las soluciones en él violan ciertas restricciones que se derivan del método y que son necesarias para la existencia de una mejor solución. Así la efectividad del métodod depende de la habilidad para eliminar el mayor número posible de soluciones sin tener que evaluarlas explícitamente.

El método de Particionamiento, Benders (1962) se usa en problemas Enteros Mixtos.Se separa el problema en su parte entera y su parte real. Se fija una valor de las variables enteras y se resuelve el problema continuo resultante. La solución de este permite generar una restricción sobre la variable entera. Repitiendo este procedimiento se tiene en cada iteración un sistema de desigualdades sobre las variables enteras. En cada paso se busca una solución entera que satisfaga este sistema y se resuelve el siguiente problema continuo fijando las variables enteras en el valor encontrado como solución del sistema de desigualdades, hasta que el sistema de desigualdades no tenga solución.

El método de Relajación Lagrangiana Everett (1963) es útil cuando se tienen restricciones complicadas (en estructura por ejemplo). Las restricciones difíciles se agregan a la función objetivo con una función de Lagrange.

Dentro de estos métodos encontramos los llamados ”Generación de Columnas” y métodos de Subgradientes.

1.1 Branch-and-Bound

El método encuentra la solución óptima del problema entero enumerando eficientemente las soluciones en la región factible de subproblemas que son generados mediante ramificación de las variables que no son enteras en la solución de problemas relajados.

Es importante tomar en cuenta que:

- Si la solución óptima del problema relajado es entera esta será la solución del problema entero
- La solución óptima del problema relajado de maximización (de minimización) es siempre una cota superior (inferior) del problema entero.

1.2 Branch-and-Bound en problemas enteros puros

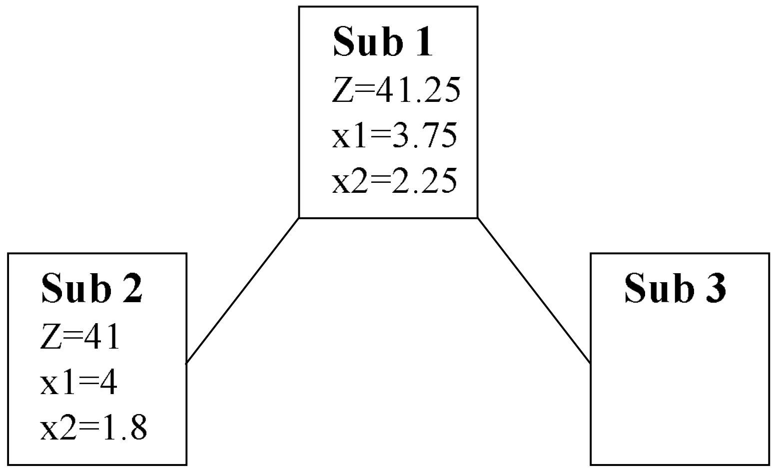
El método comienza resolviendo el problema relajado. Si la solución es entera ésta será la solución del problema entero. Este problema relajado se llama Subproblema 1. Si la solución del problema relajado no es entera se procede a ramificar sobre una variable no entera. Veamos esto en el ejemplo anterior.

$\max 8x_1 + 5x_2$
s.a $x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
x_1, x_2 enteros no negativos

donde la solución del Subproblema 1 es $x_1 = 3.75$ y $x_2 = 2.25$, $Z = 41.25$.
La solución del problema entero debe entonces ser inferior a 41.25.
Elegimos arbitrariamente una variable que no sea entera en la solución del Sub 1, $x_1 = 3.75$ por ejemplo. Observamos que cualquier solución entera del problema original debe ser tal que $x_1 \leq 3$ o $x_1 \geq 4$. Creamos así dos nuevos subproblemas (no enteros):

Sub 2: $\max 8x_1 + 5x_2$
s.a $x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_1 \geq 4, x_2 \geq 0$

Sub3: $\max 8x_1 + 5x_2$
s.a $x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_1 \leq 3, x_2 \geq 0$



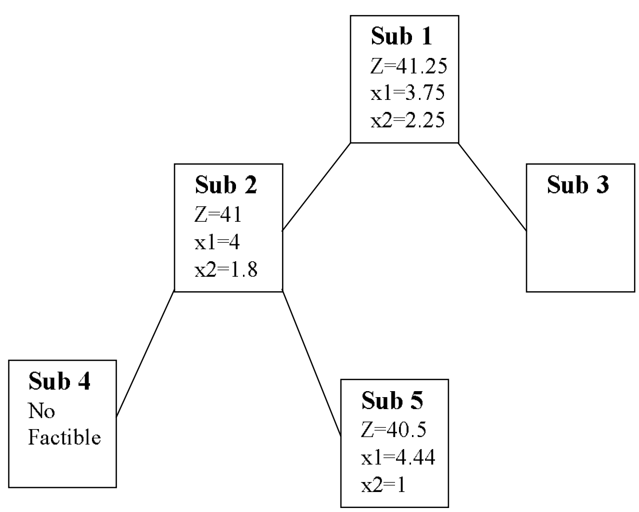
(3)

La solución del Sub 2 no es entera y procedemos a ramificar sobre la variable no entera $x_1 = 1.8$. Creamos así dos nuevos subproblemas, Sub 4 y Sub 5.

Sub 4: $\max 8x_1 + 5x_2$
s.a $x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_1 \geq 4, x_2 \geq 2$
y
Sub 5: $\max 8x_1 + 5x_2$
s.a $x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_1 \geq 4, x_2 \leq 1$

Notemos que la restricción $x_1 \geq 4$ está en ambos subproblemas dado que ésta proviene del nodo anterior (Sub 2)

Tenemos ahora tres Subproblemas sin resolver: Sub 3, Sub 4 y Sub 5. Utilizando como regla ” escoger primero el último subproblema generado” resolvemos el Sub 4. Éste no tiene solución factible y procedemos a resolver (usando la misma regla) el Sub 5.



(4)

Continuando con la misma regla ramificamos sobre la variable $x_1 = 4.44$ en el Sub 5 para obtener dos nuevos Subproblemas.

Sub 6: $\max 8x_1 + 5x_2$

s.a $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 5, x_2 \leq 1$

y

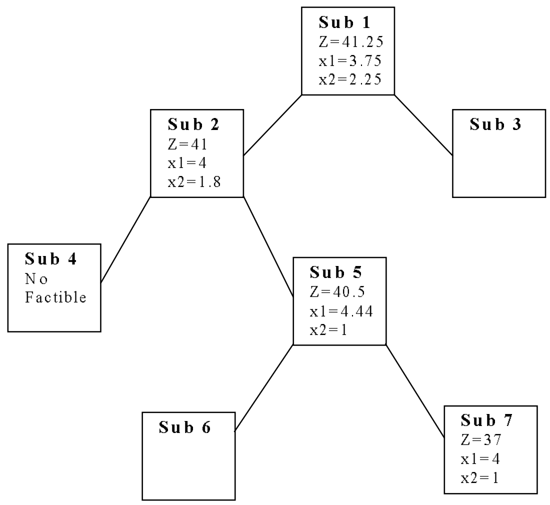
Sub 7: $\max 8x_1 + 5x_2$

s.a $x_1 + x_2 \leq 6$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 4, x_2 \leq 1$

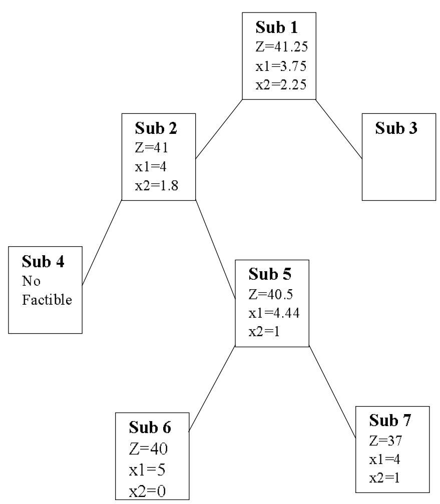
Resolviendo el Sub 7 obtenemos una solución entera. Este es un candidato a ser solución óptima



(5)

y constituye una cota inferior para el problema entero. La solución entera óptima debe ser mayor o igual a 37.

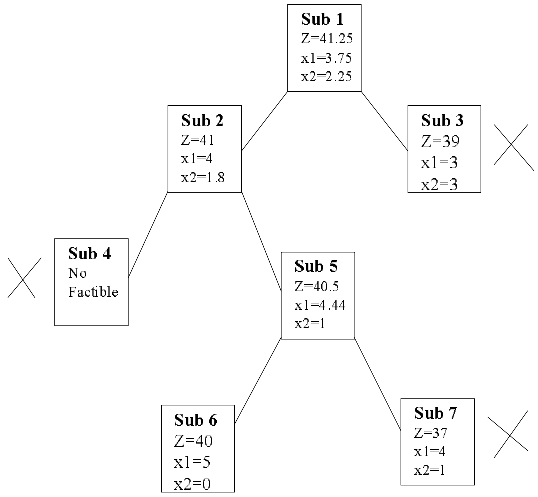
Ahora solo restan por resolver los Subproblemas Sub 3 y Sub 6 . Siguiendo la misma regla resolvemos el Sub 6



(6)

Se obtiene una nueva solución entera con un valor superior a la cota inferior de 37. Por lo tanto el Sub7 no constituye la solución óptima; hemos encontrado una mejor cota inferior Z=40.

Solo resta el Sub 3.



(7)

Como la solución del Sub 3 es entera pero menor a la cota inferior Z=40, este nodo también es descartado. Así la solución óptima es la encontrada en el Sub 6; $x_1 = 5, x_2 = 0, Z = 40$.