ALGEBRA SUPERIOR II

TAREA 1

En los ejercicios del 1 al 8, determina si la descripción de $*$ es una definición válida de una operación binaria en el conjunto.

1. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es ab (la multiplicación ordinaria).
2. En $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ es ab .
3. En $\mathbb{Z}$, donde $a * b$ es a^b
4. En $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ es a^b .
5. En $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ es $a - b$
6. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es $a\sqrt{b}$
7. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es el máximo número racional menor que ab
8. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es $2a + b$

   En los ejercicios del 9 al 18, determina si la operación binaria $*$ es conmutativa y si es asociativa.
9. En $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ es $a + b + 2$
10. En $\mathbb{Z}$, donde $a * b$ es ab
11. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es $|a|\, b$
12. En $\mathbb{R} - \{0\}$, donde $a * b$ es a/b
13. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es el mínimo entre a y b
14. En el conjunto de todas las matrices booleanas de nxn donde $A * B$ es $A \odot B$
15. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es $ab/3$
16. En $\mathbb{R}$, donde $a * b$ es $ab + 2b$
17. En una latis donde $a * b$ es $a \vee b$
18. En una latis donde $a * b$ es $a \wedge b$
19. Completa la siguiente tabla de manera que la operación binaria $*$ sea conmutativa.

$*$	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

20. Examina la operación binaria $*$ definida en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ por la siguiente tabla.

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

Calcula:

(a) $c * d$ y $d * c$

(b) $b * d$ y $d * b$

(c) $a * (b * c)$ y $(a * b) * c$

En los ejercicios 21 y 22, completa la tabla dada, de modo que la operación binaria $*$ sea asociativa¿$*$ es conmutativa?

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d				

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c				
d	d	c	c	d

21. Sea A un conjunto con n elementos.
    (a) ¿Cuántas operaciones binarias pueden definirse en A?
    (b) ¿Cuantas operaciones binarias conmutativas pueden definirse en A?
22. Sea $A = \{a, b\}$.
    (a) Determina las tablas para cada una de las 16 operaciones binarias que pueden ser definidas en A.
    (b) Determina las operaciones binarias en A que son conmutativas.
    (c) Determina las operaciones binarias en A que son asociativas.

23. Sea $A = \{a, b\}$. ¿Cuáles de las siguientes tablas de multiplicación definen un semigrupo en A?¿Cuáles definen un monoide en A?

$\bullet$	a	b
a	a	b
b	a	a

(a)

$\bullet$	a	b
a	a	b
b	b	b

(b)

$\bullet$	a	b
a	b	a
b	a	b

(c)

$\bullet$	a	b
a	a	b
b	b	a

(d)

$\bullet$	a	b
a	a	a
b	b	b

(e)

$\bullet$	a	b
a	b	b
b	a	a

(f)

En los ejercicios del 26 al 35, determina si el conjunto con la operación binaria correspondiente es un semigrupo, un monoide o ninguno. Si es un monoide especifica el idéntico. Si es un semigrupo o monoide, determina si es conmutativo.

24. $\mathbb{Z}^+$, donde $*$ está definida como una multiplicación ordinaria.
25. $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ se define como el máximo$\{a, b\}$

26. $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ se define como $mcd\{a, b\}$
27. $\mathbb{Z}^+$, donde $a * b$ se define como a
28. Los números reales distintos de cero, donde $*$ es la multiplicación ordinaria
29. $P(S)$, con S un conjunto, donde $*$ se define como la intersección
30. Un álgebra booleana B, donde $a * b$ se define como $a \wedge b$
31. $S = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, donde $a * b$ se define como $mcm\{a, b\}$
32. $S = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, donde $a * b$ se define como $mcm\{a, b\}$
33. $\mathbb{Z}$, donde $a * b = a + b - ab$
34. ¿Cuáles de las siguientes tablas de multiplicación dan un semigrupo.

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	c	b
c	a	b	c

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	c	b	a
c	b	a	c

35. Complete los espacios en blanco de la siguiente tabla para obtener un semigrupo.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c			a

36. Sea $S = \{a, b\}$, determina la tabla de multiplicación para el semigrupo S^S. ¿Es un semigrupo conmutativo?
37. Sea $S = \{a, b\}$. Determina la tabla de multiplicación para el semigrupo $(P(S), \cup)$.
38. Sea $S = \{a, b, c\}$. Examinando el semigrupo $\{A^*, \cdot\}$, donde $\cdot$ es la operación de concatenación, si $\alpha = abac$, $\beta = cba$ y $\gamma = babc$, calcula:
(a) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (b) $\gamma \cdot (\alpha \cdot \alpha)$ (c) $(\gamma \cdot b) \cdot \alpha$
39. Prueba que la intersección de dos semigrupos de un semigrupo $(S, *)$ es un subsemigrupo de $(S, *)$
40. Prueba que la intersección de dos submonoides de un monoide $(S, *)$ es un submonoide de $(S, *)$
41. Sea $A = \{0, 1\}$. Examine el semigrupo $(A^*, \cdot)$ donde $\cdot$ es la, operación de concatenación. Sea T el subconjunto de A^* que consta de todas las sucesiones que tienen un número non de unos. ¿Es $(T, \cdot)$ un subsemigrupo de $(A, \cdot)$
42. A un elemento x de un monoide se le llama *idempotente* si $x^2 = x * x = x$. Demuestra que el conjunto de todos los idempotentes en un monoide conmutativo S es un submonoide de S.

En los ejercicios del 46 al 56, determina si el conjunto con su operación binaria es un grupo. Si lo es, determina si es abeliano; especifica el idéntico y el inverso de un elemento a. En caso contrario, seala cuáles son los axiomas de grupo que no se cumplen.

43. $\mathbb{Z}$, donde $*$ es la multiplicación ordinaria.

44. $\mathbb{Z}$, donde $*$ es la sustracción.
45. $\mathbb{Q}$, el conjunto de todos los números racionales bajo la operación de adición.
46. $\mathbb{Q}$, el conjunto de todos los números racionales bajo la operación de adición.
47. $\mathbb{R}$, bajo la operación de multiplicación
48. $\mathbb{R}$ donde $a * b = a + b + 2$
49. $\mathbb{R} - \{0\}$ donde $a * b = a^2 b$
50. $\mathbb{Z}^+$, bajo la operación de adición
51. Los números reales que no son iguales a -1, donde $a * b = a + b + ab$
52. El conjunto de los enteros nones bajo la multiplicación
53. El conjunto de todas las matrices de mxn bajo la operación de adición de matrices.
54. Si S es un conjunto no vacío, el conjunto $P(S)$ donde $A * b = A \oplus B$. Esto es , si A y B son elementos de $P(S)$, entonces $A \oplus B$ es la diferencia simétrica de A y B.
55. Sea $S = \{x | x$ es un número real y $x \neq 0, x \neq -1\}$. Examine las siguientes funciones $f_i : S \longmapsto S,\ i = 1, 2, ..., 6$:
$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = 1 - x, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}$$
$$f_4(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad f_5(x) = \frac{x}{x-1}$$
Demuestra que $G = \{f_1, f_2, ..., f_6\}$ es un grupo bajo la operación de composición. Determina la tabla de multiplicación de G
56. Sea G un grupo con idéntico e. Demuestra que si $x^2 = x$ para alguna x en G, entonces $x = e$.
57. Demuestra que un grupo G es abeliano si y sólo si $(ab)^2 = a^2 b^2$.
58. Sea $G = \mathbb{R} - \{0\}$ con $a * b = \frac{ab}{3}$. Resuelve las siguientes ecuaciones:
(a) $3 * x = 4$ (b) $y * 5 = -2$ (supón que G es grupo con la operación $*$
59. Sea G un grupo con idéntico e. Demuestra que, si $a^2 = e$ para todas las a en G, entonces G es abeliano.
60. Examine el cuadro de abajo.
61. Sea G un grupo. Demuestre por inducción matemática que, si $a * b = b * a$ entonces $(ab)^n = a^n b^n$ para $n \in \mathbb{Z}$.
62. Sea G un grupo finito con idéntico e y sea a un elemento arbitrario de G. Prueba que existe un entero no negativo n tal que $a^n = e$.
63. Sea G el grupo de los enteros bajo la operación de adición. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de G son subgrupos de G?(a) el conjunto de todos los entero pares. (b) el conjunto de todos los enteros nones?
64. ¿Es el conjunto de los racionales positivos un subgrupo del grupo de los números reales bajo la operación de adición.
65. Sea G el conjunto de los enteros distintos de cero bajo la operación de multiplicación y sea $H = \{3^n | n \in \mathbb{Z}\}$. ¿Es H un subgrupo de G?
66. Sea G el conjunto de los enteros bajo la operación de adición y sea $H = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$.¿Es H un subgrupo de G?

67. Sea G un grupo abeliano con idéntico e y sea $H = \{x \in G | x^2 = e\}$. Demuestra que H es un subgrupo de G.
68. Sea G un grupo y sea H=$\{x \in G | xy = yx$ para toda $y \in G\}$. Prueba que H es un subgrupo de G.
69. Sea G un grupo y sea $a \in G$. Se define H_a=$\{x \in G | xa = ax\}$. Prueba que H_a es un subgrupo de G.

70. Sea $G, *$ un grupo. Prueba que:
    (a) el neutro es único
    (b) el inverso de cada elemento es único
    (c) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ y $b * a = c * a \Rightarrow b = c$
    (d) las ecuaciones $a * x = b$ y $x * a = b$ tienen solución única.
71. Sea S el conjunto de los números reales excepto el -1. Define $*$ en S por

$$a * b = a + b + ab$$

    (a) Muestra que $S, *$ es un grupo.
72. Encuentra la solución de la ecuación $2 * x * 3 = 7$
73. Si a, b, c y d están en $\mathbb{Z}$, demuestra que:
    (a) $(-a) + (-b) = (-a + b)$
    (b) $(c - a) - b = c - (a + b)$
    (c) $-(b - a) = a - b$
74. Demuestra que el neutro multiplicativo en $\mathbb{Z}$ es único. ¿Es cierto esto en cualquier anillo con 1?
75. Demuestra que $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{Z}$. ¿Es cierto esto en cualquier anillo con 1?
76. Demuestra que $(-1)a = -a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$. ¿Es cierto esto en cualquier anillo con 1?
77. Prueba que si $x + y = x$ en un anillo, entonces $y = 0$
78. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. $a \geq 0, b \geq 0$. Prueba que $a^2 \geq b^2$ si y sólo si $\dot{a} \geq b$
79. Sea p un número primo. Prueba que 1 y -1 son los únicos elementos en $\mathbb{Z}_p$ que son sus propios inversos.
80. Encuentra todas las soluciones de $x^2 + 2x + 4 = 0$ en $\mathbb{Z}_6$
81. Prueba que si D es un dominio entero finito, entonces D es un campo.
82. Demuestra que para todo grupo G se satisface:
    (a) $(a^{-1})^{-1} = a$ para toda $a \in G$
    (b) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, para todas $a, b \in G$
83. Da una tabla para operación $*$ en el conjunto finito $S = \{e, a, b\}$ que cumpla los axiomas de grupo de elemento identidad y de elemento inverso, pero no el de asociatividad