ALGEBRA SUPERIOR II

TAREA 2

1. ¿ Cuál es el inverso aditivo de cada elemento de los anillos?:

   (a) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$+$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

   (b) $A = \{s, t, v, w, x, y\}$

(c)

$+$	s	t	v	w	x	y
s	s	t	v	w	x	y
t	t	v	w	x	y	s
v	v	w	x	y	s	t
w	w	x	y	s	t	v
x	x	y	s	t	v	w
y	y	s	t	v	w	x

$\cdot$	s	t	v	w	x	y
s	s	s	s	s	s	s
t	s	t	v	w	x	y
v	s	v	x	s	v	x
w	s	w	s	w	s	w
x	s	x	v	s	x	v
y	s	y	x	w	v	t

2. Determina si los siguientes conjuntos de números son o no anillos con la suma y multiplicación ordinaria.

   (a) $A = \{x \in Z^+ \cup \{0\}\}$

   (b) A el conjunto de todos los enteros pares

   (c) $A = \{kn | n \in \mathbf{Z}, \mathbf{k} \text{ un entero fijo}\}$

   (d) $A = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Z\}$

   (e) $A = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} | a \in Z, b, , c \in Q\}$

3. Las tablas a) y b) hacen de $(A, +\cdot)$ un anillo, donde $A = \{s, t, x, y\}$.

   (a) ¿ Cuál es el cero para este anillo?

   (b) ¿ Cuál es el inverso aditivo de cada elemento?

(c) ¿ Cuál es el valor de $t \cdot (s + x \cdot y)$?

(d) ¿ Es A un anillo conmutativo?

(e) ¿ Tiene A unitario?

(f) Hállese un par de divisores de cero

a)

+	s	t	x	y
s	y	x	s	t
t	x	y	t	s
x	s	t	x	y
y	t	s	y	x

b)

·	s	t	x	y
s	y	y	x	x
t	y	y	x	x
x	x	x	x	x
y	x	x	x	x

4. Para el conjunto $A = P(U)$, donde $U = \{1, 2\}$, si definimos $R \cdot S = R \cap S$ y $R + S = R \cup S$. ¿ Es $(A, \cup, \cap)$ un anillo?

5. Sea $A = \{a + bi | a, b \in \mathbf{Z}, i^2 - 1\}$, con la suma y multiplicación definidas por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(a) Verifica que A es un dominio entero.

(b) Determina todas las unidades de $A/$

6. Determina el inverso multiplicativo de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ en el anillo $M_2(\mathbf{Z})$, esto es, hállense a, b, c, d tales que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Muestra que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ es una unidad en el anillo $M_2(\mathbf{Q})$, pero no en el $M_2(\mathbf{Z})$

8. Si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, prueba que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es una unidad de este anillo si y sólo si $ad - bc \neq 0$

9. Para $A = M_2(\mathbf{Z})$ pruébese que:

(a)

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | a \in \mathbf{Z} \right\}$$

es un subanillo de A

(b) ¿ Cuál es el unitario de A?

(c) ¿ Tiene S unitario?

(d) ¿ Tiene S algunas propiedades que no tiene A?

10. Sea A un anillo conmutativo con unitario u y sea I un ideal de A

    (a) Si $u \in I$, prueba que $I = A$.

    (b) Si I contiene una unidad de A, prueba que $I = A$

11. Si A es un campo, ¿ cuántos ideales tiene A?

12. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unitario, representado pro las tablas a) y b)

+	z	u	a	b
z	z	u	a	b
u	u	z	b	a
a	a	b	z	u
b	b	a	u	z

·	z	u	a	b
z	z	z	z	z
u	z	u	a	b
a	z	a	b	u
b	z	b	u	a

    (a) Verifica que A es un campo

    (b) Halla un subanillo de A que no sea un ideal

    (c) Sean x, y incógnitas.. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales en A :

$$bx + y = u$$
$$x + by = z$$

13. Sea A un anillo conmutativo con unitario u, con $u \neq z$ (z es el neutro)

    (a) Para cualquier $a \in A$, prueba que $aA = \{ar | r \in A\}$ es un ideal de A.

    (b) Demuestra que si los únicos ideales de A son $\{z\}$ y A, entonces A es un campo.

14. Sean $(B, +, \cdot)$ y $(C, +', \cdot')$ dos anillos. Para $A = B \text{x} C$, define la suma "$\oplus$" y la multiplicación "$\odot$" por

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 +' b_2)$$
$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot' b_2)$$

(a) Prueba que con estas operaciones binarias, A es un anillo.

(b) Si B y C son conmutativos, prueba que A es conmutativo

(c) Si B tiene unitario u_B y C tiene unitario u_C, ¿ cuál es el unitario de A?

(d) Si B y C son campos, ¿ lo es también A?

15. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unitario u, y $|A| = 8$. En $A^4 = A\text{x}A\text{x}A\text{x}A$, define $+, \cdot$ como en el problema anterior. En el anillo A^4 :

(a) ¿ Cuántos elementos tienen exactamente dos componentes distintas de cero?

(b) ¿ Cuántos elementos tiene todos los componentes distintos de cero?

(c) ¿ Hay unitario?

(d) ¿ Cuántas unidades hay si A tiene cuatro unidades?

16. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillos con $a \in A$. Define $0 \cdot a = z$, $1 \cdot a = a$ y $(n+1) \cdot a = n \cdot a + a$ para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$. (Aquí se multiplica elementos de A por elementos de $\mathbf{Z}$, de modo que resulta una operación diferente de la multiplicación de $\mathbf{Z}$ y A.) Para $n > 0$, se define $(-n)a = n(-a)$, de modo que, por ejemplo, $(-3)a = 3(-a) = 2(-a) + (-a) = [(-a) + (-a)] + (-a) = -[(a + a) + a] =$
$= -[2a + a] = -3a$.

Para cualquier $a, b \in A, m, n \in \mathbf{Z}$ prueba que:

(a) $ma + na = (m + n)a$

(b) $m(na) = (mn)a$

(c) $n(a + b) = na + nb$

(d) $n(ab) = (na)b = a(nb)$

(e) $(ma)(nb) = (mn)(ab) = (na)(mb)$

17. Da un ejemplo de un anillo con ocho elementos ¿ Qué sucede con uno de 16 elementos? Generaliza.

18. Definase un nuevo tipo de suma y multiplicación, representadas por $\oplus$ y $\odot$, en el conjunto $\mathbf{Z}$ como sigue. Para $x, y \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{1}, \mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{xy}$.

(a) Prueba que $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo

(b) ¿ Es este anillo conmutativo?

(c) ¿ Tiene unitario el anillo?

(d) ¿ Tiene unidades?

(e) ¿ Es el anillo un dominio entero?

(f) ¿ Es un campo?

19. Para $A = \{s, t, x, y\}$, defínase $+$ y $\cdot$, que hacen de A un anillo, por la tabla (a) para $+$ y la tabla parcial para $\cdot$ (b)

(a)

$+$	s	t	x	y
s	s	t	x	y
t	t	s	y	x
x	x	y	s	t
y	y	x	t	s

(b)

$\cdot$	s	t	x	y
s	s	s	s	s
t	s	t		
x	s	t		y
y	s		s	

(a) Utilizando las leyes asociativas y distributivas, determínese los registros para los espacios vacío de la tabla de multiplicación

(b) ¿ Es conmutativo este anillo?

(c) ¿ Tiene unitario?¿ Tiene unidades?

(d) ¿ Es el anillo un dominio entero o un campo?

20. Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo y $a, b, c, \in A$, prueba que:

(a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ y $b + a = c + a \Rightarrow b = c$

(b) $-(-a) = a, \quad a(-b) = (-a)b = -(ab), \quad (-a)(-b) = ab$

(c) Si A tiene unitario entonces es único

(d) Si A tiene unitario y x es una unidad entonces el inverso multiplicativo de x es único

(e) Si $\emptyset \neq S \subseteq A$ entonces:

i. $(S, +, \cdot)$ es un subanillo de A, si y sólo si, para $a, b \in S$, $a - b, ab \in S$

ii. Si S es finito entonces $(S, +, \cdot)$ es un subanillo de A, si y sólo si, para $a, b \in S, a + b, ab \in S$

21. Si a, b, c son elementos de un anillo $(A, +, \cdot)$, prueba que:

(a) $a(b - c) = ab - (ac)$

(b) $(b-c)a = ba - (ca)$

22. Si A es un anillo unitario y a, b son unidades de A, demuestra que ab es una unidad de A y que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

23. Para el anillo $M_2(\mathbf{Z})$, hállense $A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}, (BA)^{-1}, B^{-1}A^{-1}$ si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Demuestra que una unidad de un anillo A no puede ser un divisor propio del cero

25. Si a es una unidad de un anillo A, demuestra que $-a$ también es unidad

26. Si a, b son unidades en un anillo A, ¿ es necesariamente $a + b$ una unidad?

27. Sean S, T subanillos de un anillo A. Prueba que $S \cap T$ es un subanillo de A.

28. Responde el ejercicio anterior, sustituyendo "subanillo" por "ideal"

29. Para $A = M_2(\mathbf{Z})$ prueba que:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | a \in \mathbf{Z} \right\}$$

es un subanillo de A.

30. Haz una lista de todos los enteros x en el intervalo $1 \leq x \leq 100$ que satisfagan $x \equiv 7 \ (mod\ 17)$.

31. Muestra un sistema completo de residuos modulo 17 compuesto enteramente de múltiplos de 3.

32. Muestra un sistema reducido de residuos para el módulo 12; para 30.

33. Observa que si un entero x es par, debe satisfacer la congruencia $x \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Si un entero y es impar ¿ qué congruencia satisface?¿ Qué congruencia satisface un entero z de la forma $6k + 1$

34. Escribe una sola congruencia que sea equivalente al par de congruencias $x \equiv 1 \ (mod\ 4)$, $x \equiv 2 \ (mod\ 3)$

35. Prueba que si p es un primo y $a^2 \equiv b^2 \ (mod\ p)$, entonces $p|(a + b)$ o $p|(a - b)$

36. Demuestra que si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y si $f(a) \equiv k \ (mod \ m)$, entonces $f(a = tm) \equiv k \ (mod \ m)$ para todo entero t

37. Prueba que cualquier número que sea un cuadrado debe tener como dígito de las unidades a cualquiera de los siguientes: 0,1,4,5,6,9

38. Prueba que cualquier cuarta potencia debe tener como dígito de las unidades a 0,1,5 o bien 6.

39. Evalúa $\phi(n)$ para $n = 1, 2, 3, ..., 12$

40. Encuentra el menor entero positivo x tal que $13|x^2 + 1$

41. Prueba que 19 no es un divisor de $4n^2 = 4$ para entero n

42. Muestra un sistema reducido de residuo módulo 7 compuesto enteramente por potencias de 3

43. Resuelve $3x \equiv 5 \ (mod \ 11)$

44. Los enteros $12, 23, 34, 45, 56$ son congruentes a 1 módulo 11 Para resolver $5x \equiv 1 \ (mod \ 11)$ simplemente se observa que $45 = 5x9$ y de aquí que $x = 9$ es una solución. Resuelve $ax \equiv 1 \ (mod \ 11)$ para $n = 2, 3, ..., 10$

45. Prueba que n^6 es divisible entre 7 si $(n, 7) = 1$

46. Prueba que $n^7 - n$ es divisible entre 42 para todo entero n

47. Prueba que $n^{12} - 1$ es divisible entre 7 si $(n, 7) = 1$

48. Prueba que $n^{6k} - 1$ es divisible entre 7 si $(n, 7) = 1$, siendo k cualquier entero positivo

49. Prueba que $n^{13} - n$ es divisible entre $2, 3, 5, 7$ y 13 para cualquier entero n

50. Prueba que $n^{12} - a^{12}$ es divisible entre 13 si n y a son primos relativos con 13

51. Encuentra todas las soluciones de las congruencias:

    (a) $20x \equiv 4 \ (mod \ 30)$

    (b) $20x \equiv 30 \ (mod \ 4)$

    (c) $353x \equiv 254 \ (mod \ 400)$

52. ¿ Cuántas soluciones existen para cada una de las siguientes congruencias?

    (a) $15x \equiv 25 \ (mod \ 35)$

(b) $15x \equiv 24 \ (mod\ 35)$

(c) $15x \equiv 0 \ (mod\ 35)$

53. Encuentra el menor entero positivo (excepto el 1) que satisfaga simultáneamente las siguientes congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \ (mod\ 3) \\ x &\equiv 1 \ (mod\ 5) \\ x &\equiv 1 \ (mod\ 7) \end{aligned}$$

54. Encuentra todos los enteros que satisfagan simultáneamente:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \ (mod\ 3) \\ x &\equiv 3 \ (mod\ 5) \\ x &\equiv 5 \ (mod\ 2) \end{aligned}$$

55. Resuelve el conjunto de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \ (mod\ 4) \\ x &\equiv 0 \ (mod\ 3) \\ x &\equiv 5 \ (mod\ 7) \end{aligned}$$

56. Encuentra todos los enteros que dan los residuos 1,2,3 cuando de dividen entre 3,4,5, respectivamente

57. Si a se selecciona al azar de 1,2,3,...,14 y b se selecciona al azar de 1,2,3,...,15,¿ cuál es la probabilidad de que $ax \equiv b \ (mod\ 15)$ tenga por lo menos una solución?¿ Exactamente una solución?

58. Dado cualquier entero positivo k, prueba que existen k enteros consecutivos cada uno de los cuales es divisible entre un cuadrado.

59. Si x_2 es una solución de la congruencia $ax \equiv b \ (mod\ m)$ (tal vez obtenida mediante la aplicación del algoritmo de Euclides a a y m), prueba que $x \equiv x_2 + t(m/g) \ (mod\ m)$ proporciona todas las soluciones conforme t recorre todos los valores $0, 1, 2, ..., g-1$, donde g se define como $g = (a, m)$

60. Supón que $(a, m) = 1$ y que x_1 denota una solución de $ax \equiv 1 \ (mod\ m)$. Para $s = 1, 2, ...$, sea $x_s = \dfrac{1a}{(1 - ax_1)}$. Prueba que x_s es un entero y que es una solución de $ax \equiv 1 \ (mod\ m^s)$.