ALGEBRA SUPERIOR II

TAREA 3

1. Describe todas las unidades de cada uno de los siguientes anillos.

   (a) $\mathbf{Z}_5$

   (b) $\mathbf{Q}$

   (c) $\mathbf{Z}_4$

2. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ en $\mathbf{Z}_{12}$

3. Demuestra que los siguientes conjuntos, con las operaciones dadas, son grupos.

   (a) $(S, \cdot)$ donde $S = \{1, -1, i, -i\}$

   (b) $(S, \cdot)$ donde $S = \{z \in \mathbf{C} \,||z| = 1\}$

   (c) $(U_n, *)$, donde $U_n = \{\theta_n^k | k = 0, 1, ..., n-1\}$, con $\theta_n = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$ y donde $\theta_n^k * \theta_n^j = \theta_n^s$, donde $s \equiv k + j \ (mod \ n)$, $\theta_n^n = 1$

4. Demuestra que el conjunto de los complejos no tiene divisores propios del cero

5. Sean $z_1 = 1 + i, z_2 = -2 + i, z_2 = 1 - i$. Calcula lo que se indica:

   a) z_2^{-1} b) z_3^{-1} c) $\frac{z_1}{z_2}$ d) $\frac{1}{z_2 z_3}$ e) $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$

6. Demuestra que:

   a) $(\sqrt{2 - i}) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$ b) $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i} = -\frac{2}{5}$ c) $(1 - i)^4 = -4$

7. Encuentra los valores de x, y, que satisfacen la igualdad $(1 + i)(x + iy) = 2 + i$

   (a) Mediante un par de ecuaciones simultáneas en x, y

   (b) Utilizando el inverso multiplicativo de $(1 + i)$

8. Encuentra números complejos $z = x + iy, w = u + iv$, que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z + iw &= 1 \\ iz + w &= 1 + i \end{aligned}$$

9. Demuestra que la ecuación $x^2 - y^2 = 1$, correspondiente a una hipérbola, se puede escribir como $z^2 + (\overline{z})^2 = 2$, donde $z = x + iy$

   – Determina el valor de la suma $\sum_{k=0}^{n} i^k$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

10. ¿Cuál es el lugar geométrico de los números complejos z en cada uno de los siguientes casos.

    a) $|z| = 1$ b) $|z| \leq 1$ c)$|z| > 1$ d) $|z - 1 + i| \leq 1$

11. Encuentra el argumento de z en los siguientes casos

    a) $z = \dfrac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$ b) $z = (\sqrt{3} - i)^6$

12. Escribe los siguientes complejos en su forma polar:

    a) $z = i$ b) $z = \sqrt{3} + i$ c) $z = 1 - i\sqrt{3}$

13. Aplica la forma polar para demostrar que $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + i2\sqrt{3}$

14. Sean $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Encuentra el productos $z_1 z_2$ utilizando el método gráfico.

15. Obtén las raíces cuadradas de

    a) i b) $i + i$ c) $\sqrt{i}$

16. Calcula las siguientes raíces. Expresa las soluciones en la forma $a+bi$ y represénteles gráficamente

    a) $(-i)^{\frac{1}{3}}$ b) $(-1)^{\frac{1}{6}}$ c) $8^{\frac{1}{6}}$

17. Demuestra que cada uno de los

18. Prueba

19. Obtén

20. Encuentra

21. Encuentra

22. Simplifica las siguientes expresiones:

    a) $(1 \pm i)^{16}$ b) $\dfrac{1 + i}{(1 - i)^2}$ c) $\left[\dfrac{34}{(1 - 45i)(5 + 3i)}\right]^2$ d) $\left|\dfrac{(6 + 7i)(4 - 2i)}{4 + 2i}\right| \left|-\dfrac{1}{7 + 6i}\right|$

23. Utiliza el teorema de De moivre para probar que:

a) $cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$ b) $sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta)$

24. Demuestra que si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

a) $\sqrt{zw} = \pm(\sqrt{z}\sqrt{w})$ b) Si $w \neq 0$ entonces $\sqrt{\frac{z}{w}} = \pm\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{w}}\right)$