ALGEBRA SUPERIOR II

TAREA 4

1. Expresa los siguientes números complejos en la forma $a + bi$:

   (a) $(2 + 3i) + (4 + i)$

   (b) $(2 + 3i)(4 + i)$

   (c) $\dfrac{2 + 3i}{4 + i}$

   (d) $(8 + 6i)^2$

   (e) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{3}{1 + i}$

   (f) $\left(1 + \dfrac{3}{1 + i}\right)^2$

2. Encuentra los valores de x y y que satisfacen la igualdad $(1 + i)(x + yi) = 2 + i$

   (a) mediante un par de ecuaciones simultáneas en x y y

   (b) utilizando el inverso multiplicativo de $1 + i$

3. Determina el valor de la suma $\sum_{k=0}^{n} i^k$, para todo $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

4. Encuentra números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ que satisfagan:

   (a) $z + iw = 1, \quad iz + w = 1 + i$

   (b) $(1 + i)z - iw = 3i, \quad (2 + i)z + (2 - i)w = 2i$

5. Sea D un dominio entero ordenado y sean $a, b, c, \in D$, demuestra que:

   (a) se cumplen una y sólo una de las siguientes relaciones: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$

   (b) $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$

   (c) $a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$

   (d) $a < 0 \Leftrightarrow a + c < b + c$

   (e) $a - x < a - y \Leftrightarrow x > y$

   (f) si $a, 0$, entonces $ax > ay \Leftrightarrow x < y$

   (g) $x + x + x + x = 0 \Rightarrow x = 0$

6. Prueba que si $a \in \mathbf{R}$, entonces la ecuación $x^2 = a$ siempre tiene solución en $\mathbf{C}$.

7. Obten las raíces cuadradas de:

   (a) $\sqrt{i}$

   (b) $24 - 7i$

   (c) $1 + i$

   (d) i

8. Prueba que si $z, w \in \mathbf{C}$, entonces

   (a) $\sqrt{zw} = \pm(\sqrt{z}\sqrt{w})$

   (b) Si $w \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{z}{w}} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{w}}\right)$

9. Obten las soluciones de la siguientes ecuación:

$$x^2 + 2ix + 1 = 0$$

10. Simplifica lo siguiente:

    (a) $(1 + i)^4$

    (b) $(-i)^{-1}$

    (c) $\sqrt{1 + \sqrt{i}}$

11. ¿Cuál es la posición relativa de los puntos $z = a + bi$ y $w = b + ai$?

12. ¿Cuál es el lugar geométrico de los números complejos z tales que:

    (a) $|z| = 1$?

    (b) $|z| < 1$?

    (c) $|z| > 1$?

13. Prueba que si z y w son números complejos, entonces:

    (a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

    (b) $(\overline{-z}) = -(\overline{z})$

    (c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(d) Si $w \neq 0$, entonces $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \left(\frac{\overline{z}}{\overline{w}}\right)$

(e) $\overline{\overline{z}} = z$

(f) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \quad Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

14. Prueba que: si z y z' son números complejos, entonces

$$|z - z'| \geq ||z| - |z'||$$

15. Si $|z| = 1$ o $|w| = 1$, prueba que

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| = 1 \qquad \text{supón que } z\overline{w} \neq 1$$