PROBLEMAS DE CONTEO

1. Considera el siguiente mapa de carreteras:

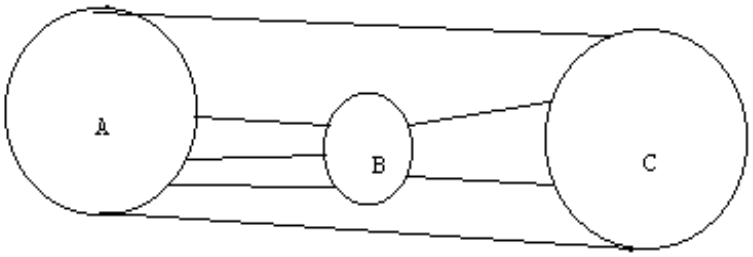

Figure 1:

   (a) ¿De cuántas formas podemos ir de A a B y después regresar a A sin pasar por C?

   (b) ¿De cuántas formas podemos ir de A a C pasando por B?

2. Los números de identificación de una compañía consisten en 2 letras seguidas de 2 dígitos seguidos de dos letras seguidos de dos dígitos. ¿Cuántos números de identificación hay?

3. ¿Cuántas sumas y cuántas multiplicaciones debemos realizar para multiplicar dos matrices de nxn.

4. ¿Cuántas palabras de longitud 3 se pueden formar con las letras del alfabeto si:

   (a) cualquier letra se puede usar en cualquier posición?

   (b) las letras deben ser distintas?

   (c) la primera y la ultima deben ser consonantes y la otra vocal?

   (d) la primera o la ultima debe ser consonante?

5. En un restaurante chino puedes escoger una sopa, un aperitivo, un plato principal y un postre. ¿De cuántas distintas formas puedes elegir tu comida si hay 5 sopas, 6 aperitivos, 20 platos principales y 3 postres?

6. ¿Cuántas palabras ternarias (formadas por los símbolos 0,1,2) de longitud 8 hay?

7. ¿Cuántas palabras binarias hay (formadas por los símbolos 0,1) hay cuya longitud sea al menos cuatro y a lo mas 6?

8. Usando los símbolos { 0,1,2,3 }, ¿cuántas palabras de longitud 8 hay?

9. En el problema 5, ¿cuántas palabras que empiecen con 0 hay?

10. En el problema 5, ¿cuántas que no empiecen con 0 hay?

11. En el problema 5,¿cuántas palabras utilizan al menos un 2?

12. ¿Usando los símbolos $\{0, 1\}$, ¿cuántas palabras binarias de longitud n hay si consideramos iguales a una palabra y su inversa (la palabra leída de derecha a izquierda) por ejemplo, 1011 y 1101 son iguales)

13. ¿Cuántos números hay entre el 1 y el 1,000,000 que utilicen al menos un 9?

14. (a) ¿Cuántos números enteros entre 100 y 999 hay que tengan todas sus cifras distintas?

    (b) ¿Cuántos números del inciso a) son impares?

15. Supón que tienes una caja con 10 pelotas numeradas del 1 al 10. Selecciona 3 de esas pelotas y apunta los números de estas, obteniendo una sucesión de tres números.

    (a) ¿Cuántas de esas sucesiones de tres números hay si reemplazas a cada bola cada vez que sale, esto es, permites que una pelota sea escogida mas de una vez?

    (b) ¿Cuántas de esas sucesiones hay si no se permite reemplazar a una pelota, esto es, no se permite escoger dos o mas veces a la misma pelota?

16. Supón que tienes 10 pares de calcetines do 10 colores distintos en un cajón y que los calcetines no están juntos por pares. ¿Cuántos calcetines tienes que sacar para estar seguro de tener una par?

17. Muestra que dados tres números enteros, al menos dos de ellos deben tener la propiedad de que su diferencia sea par.

18. ¿Cuántos enteros entre 0 y $2n$ debes escoger para asegurarte de que al menos unos es impar?

19. ¿Cuántos libros debes escoger de una colección de 7 libros de química, 18 de matemáticas, 12 de computación y 11 de física para poder asegurar que tienes al menos 5 libros de cada materia?

20. Tienes n cajas y $2n + 1$ pelotas. Al colocar a las pelotas en las cajas, sea M el mayor número de pelotas que quedaron en una caja, ¿cuál es el menor valor posible de M?

21. Tienes n cajas y $kn + 1$ pelotas. Al colocar a las pelotas en las cajas, sea M el mayor número de pelotas que quedaron en una caja,¿cuál es el menor valor posible de M.

22. Muestra que si $a_1+a_2+\ldots+a_n-n+1$ pelotas son colocadas en n cajas entonces la primera caja recibe al menos a_1 pelotas o la segunda caja recibe a_2 al menos o la tercera recibe a_3 etc.

23. Supón que colocas m pelotas en n cajas y que $m < \frac{n(n-1)}{2}$, demuestra que hay al menos dos cajas con el mismo número de pelotas.

24. Sea n un número entero positivo impar y sean $b_1, b_2, \ldots, b_n$ un rearreglo de los números $1, 2, \ldots n$. Prueba que el número $(b_1-1)(b_2-1)\ldots(b_n-1)$ es par.

25. Una bolsa tiene 50 canicas de cuatro colores. Explica por qué debe haber al menos 13 canicas de un color.

26. Si en el problema anterior hay exactamente 8 canicas rojas, explica por qué debe haber al menos 14 canicas del mismo color.

27. Sea A un subconjunto de $\{ 1, 2, 3, \ldots, 50 \}$ de 10 elementos, muestra que A tiene dos subconjuntos distintos con 5 elementos tales que la suma de los elementos del primero y la suma de los elementos del segundo son iguales.

28. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ una sucesión de n^2+1 números reales distintos.. Demuestra que existe una subsucesión de $n+1$ términos que es o bien creciente o bien decreciente, esto es, existen subíndices $k_1 < k_2 < \ldots < k_{n+1}$ tales que o bien $a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_{n+1}}$ o $a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots > a_{k_{n+1}}$

29. Simplifica lo más posible :

    (a)
    $$\frac{n!}{(n-1)!}$$

    (b)
    $$\frac{(n+2)!}{n-1}$$

    (c)
    $$\frac{(2n)}{n!}$$

30. Da un ejemplo para mostrar que $(m+n)!$ no es igual a $m!+n!$ y otro para mostrar que $m!n!$ no es igual a $(mn)!$.

31. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 9 programas de computadora si cierto programa siempre debe ir al final?

32. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 8 programas de computadora si el programa p_3 debe de estar inmediatamente después del programa p_2 el cual debe de estar inmediatamente después del programa p_1?

33. ¿Cuántas palabras binarias de longitud 10 hay que tengan al menos dos "0"?

34. ¿Cuántas palabras ternarias de longitud 5 tienen al menos dos "1" y al menos dos "2"?

35. Si lanzas 10 volados, ¿de cuántas formas te pueden salir al menos dos "águilas"?

36. ¿De cuántas formas se puede acomodar en un librero 2 libros de matemáticas, 3 de computación y 4 de física si:

    (a) No hay restricciones?

    (b) Primero deben ir los de matemáticas, después los de física y después los de computación?

    (c) Los libros del mismo tema tienen que estar juntos?

37. ¿Cuántas sucesiones de $2n$ enteros tomadas del conjunto $\{1, 2, 3, ...2n\}$, hay si

    (a) primero deben ir los números impares?

    (b) los números en la sucesión deben alternarse en paridad (par,impar,par)?

38. ¿De cuántas formas se pueden sentar en una mesa 6 personas si:

    (a) no hay restricciones?

    (b) la persona p_2 no se puede sentar al lado de la persona p_1?

39. ¿De cuántas formas se pueden sentar en una mesa circular n hombres y m mujeres si los hombres y las mujeres deben alternarse(hombre,mujer,hombre,...)?

40. Sea Σ un alfabeto con 10 elementos. ¿Cuántas palabras de longitud 5 se pueden formar usando los elementos de Σ si no se pueden repetir letras?

41. Sea Σ un alfabeto con 10 elementos. ¿Cuántas palabras se pueden formar usando los elementos de Σ si no se pueden repetir letras?

42. ¿De cuántas formas se pueden meter k pelotas en n cajas de tal forma que ninguna caja reciba más de una pelota?

43. Demuestra que:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$

    si $j \leq k \leq n$

44. En un club hay 5 hombres y 6 mujeres

    (a) ¿Cuántos comités de 3 personas se pueden formar?

(b) ¿Cuántos comités de tres hombres y cuatro mujeres se pueden formar?

(c) ¿Cuántos comités de 6 personas se pueden formar si hay dos mujeres que no quieren estar juntas?

(d) ¿Cuántos comités de 4 hombres y 3 mujeres se pueden formar dos hombres no quieren estar en el mismo comité?

45. ¿Cuántas palabras binarias de longitud 10 hay que tengan exactamente seis "0"?

46. ¿Cuántas palabras binarias de longitud 10 hay que tengan al menos tres "1"?

47. ¿Cuántas palabras ternarias de longitud 10 hay que contengan exactamente cuatro "2"?

48. Cuántas palabras ternarias de longitud 10 hay que contengan a lo más ocho "0"?

49. ¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos hay en el conjunto $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ con la propiedad de que la suma de los elementos sea par?

50. Demuestra que:

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + ... + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}$$

51. Demuestra que :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(a) algebraicamente

(b) usando un argumento combinatorio(los dos lados de la igualdad cuentan lo mismo)

52. Demuestra que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

53. Demuestra que:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

54. Demuestra que:

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + ... + (n+1)\binom{n}{n} = 2^n + n2^{n-1}$$

55. Demuestra que:

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + ... + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

56. La baraja completa de "**POKER**" consta de 52 cartas (13 "números" : A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K y 4 "palos": ♣♠♡♢). Una mano de póker consta de cinco cartas. ¿Cuántas manos de póker hay?

57. ¿Cuántas manos de póker hay que no tengan dos cartas del mismo número?

58. ¿Cuántas manos de póker hay en las que aparezcan por lo menos dos cartas del mismo número?

59. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan exactamente un par?

60. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan exactamente dos pares?

61. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan al menos una tercia (y que no sea full)

62. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan full?

63. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan póker?

64. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan color?

65. ¿Cuántas manos de póker hay que tengan corrida?

66. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono regular de n lados?

67. En un grupo de 200 estudiantes, 80 toman clases de matemáticas, 60 toman clase de química y 30 toman las dos clases. ¿Cuántos estudiantes toman al menos una de las clases?¿Cuántos estudiantes no toman ninguna de las clases?

68. ¿Cuántos enteros entre 1 y 3500 son divisibles por 5 o por 7?¿Cuántos enteros entre 1 y 3500 no son divisibles ni entre 5 ni entre 7?

69. ¿Cuántos enteros entre 1401 y 14000 son divisibles por 2 o por 7?¿cuántos enteros entre 1401 y 14000 no son divisibles ni entre 2 ni entre 7?

70. ¿Cuántos enteros entre 1 y 30,000 son divisibles entre 3 pero no divisibles entre 5?

71. ¿Cuántas permutaciones hay de los números 1,2,3,...,9 tales que empiecen con 123 o terminen con 89 (por ejemplo 123859467 empieza con 123, 542317689 termina en 89 y 123456789 empieza con 123 y termina con 89)?¿cuántas permutaciones hay de los números 1,2,3,...9 tales que no empiecen con 123 ni terminen en 89 ?

72. ¿Cuántas selecciones (muestras) con repetición de tamaño 7 hay usando los símbolos $\{x, y, z\}$ de tal forma que x no se puede repetir más de una vez, y no se puede repetir más de 4 veces y z no se puede repetir más de 5 veces?

73. ¿Cuántas soluciones enteras hay de la ecuación $x+y+z=25$ con la propiedad de que $0 \leq x \leq 8 \qquad 3 \leq y \leq 12 \qquad 7 \leq z \leq 10$?

74. ¿Cuántas soluciones enteras hay de la ecuación $x+y+z=30$ con la propiedad de que $0 \leq x \leq 10 \qquad 7 \leq y \leq 15 \qquad 10 \leq z \leq 25$?

75. 6 parejas van a un baile. ¿De cuántas formas pueden bailar los 6 hombres con las 6 mujeres de tal forma que ninguno baile con su esposa?

76. ¿Cuántas palabras de longitud 5 se pueden formar con los elementos del conjunto $\{x, y, z\}$ de tal manera que cada elemento aparezca al menos una vez?

77. ¿Cuántas palabras de longitud k se pueden formar con los elementos del conjunto $\{a_1, a_2, a_3, ...a_n\}$ de tal manera que cada elemento aparezca al menos una vez?

Algunas preguntas de exámenes pasados

1. Cuántas cadenas (palabras) ternarias(usando los símbolos 0,1,2) hay, de longitud 10 tales que:

   a) tengan exactamente cuatro ceros y tres unos?

   b) tengan exactamente cuatro "2"?

   c) tengan al menos ocho ceros?

2. Considera el alfabeto $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuántas palabras de longitud 4 se pueden formar de tal forma que cada letra del alfabeto S aparezca al menos una vez?

3. Encuentra, justificando tu respuesta, todos los números entre 100 y 1000 formados con los dígitos 0,1,2,3,5 (sin repetición) y tales que sean divisibles entre 6.

4. De un grupo de 10 hombres y 15 mujeres se quiere escoger a 4 hombres y 6 mujeres para que asistan a un congreso.¿De cuántas formas se puede hacer la elección de manera que:

   a) no haya restricción?

   b) Juan vaya, puesto que es el organizador?

   c) María y Luisa queden juntas, es decir, o van las dos o va ninguna?

5. ¿De cuántas formas se pueden programar tres exámenes A, B y C, en un período de 5 días:

   a) Sin ninguna restricción?

   b) Si el examen A debe aplicarse al menos un día antes del B y del C?

   c) Si en un día sólo puede aplicarse un examen?

6. Si $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, ¿cuántas particiones de A hay del tipo $\{A_1, A_2, A_3\}$, con $\#A_1 = 2$, $\#A_2 = 3$ y $\#A = 2$?

7. ¿Cuántas soluciones hay de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ con $x_1 \geq -2$ y $x_3 \geq 2$?

8. (a) ¿De cuántas maneras se puede formar el patrón:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathrm{x} & & & \\ & & & \mathrm{x} & & & \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \\ & & & \mathrm{x} & & & \\ & & & \mathrm{x} & & & \end{array}$$

   usando ceros y unos?

   (b) ¿Cuántos de estos patrones no son simétricos?

9. Si $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3 |\ \ x_1 + x_2 + x_3 < 6,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$ y $T = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{Z}^4 |\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$, con $y_i \geq 0$, para $i = 1, ...3$ y $y_4 > 0\}$ prueba que S y T tienen la misma cardinalidad

10. Sea $A = \{1, 2, 3, ..., 1995, 1996\}$.

    (a) ¿Cuántas relaciones hay de A en A?

    (b) Cuántas relaciones simétricas hay de A en A?

11. Se sabe que en la universidad el 60% de los profesores juega tenis, el 50% juega bridge, el 70% corre, el 20% juega tenis y bridge, el 30% juega tenis y corre y el 40% juega bridge y corre. Si alguien afirma que el 20% de los profesores corre y juega bridge y tenis, ¿lo creería?¿por qué?

12. Un hombre caminó por 10,horas y cubrió una distancia total de 45 km. Se sabe que caminó 6 km. en la primera hora y sólo 3 km. en la última. Demuestra que debió haber caminado al menos 9 km. dentro de un periodo de 2hrs. consecutivas.

13. ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, ..., 1996\}$ que no tienen dos enteros consecutivos?

14. ¿Cuántas sucesiones ternarias de n dígitos tiene exactamente r unos?

15. ¿De cuántas maneras se pueden disponer en línea los enteros 1,2,3,...,10 para que ningún entero par quede en su posición natural?

16. Sea C un conjunto con 56 enteros positivos cuyo máximo es, a lo sumo, 9. Prueba que las sumas de los elementos de todos los subconjuntos de C no pueden ser distintas

17. Usando los símbolos $\{0, 1, 2, 3\}$, ¿Cuántas palabras de longitud 20 podemos formar:

    (a) sin restricciones?

    (b) tenga exactamente cinco "0", ocho "1" y tres "2"?

    (c) no tenga "2"?

    (d) tenga al menos 8 "2"?

18. Encuentra todas las soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50$$

    con $0 \leq x_1 \leq 20$, $-2 \leq x_2 \leq 20$, $0 \leq x_3 \leq 20$

19. Si once números enteros son seleccionados del conjunto $\{1, 2, 3, ..., 100\}$, prueba que existen al menos dos tales que: $0 \leq \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq 1$

20. ¿Cuántos dígitos hay en $T = \{1000, 1001, ..., 9999\}$, que tengan al menos un dígito que sea 0, al menos un dígito que sea 1 y al menos un dígito que sea 2?

21. ¿De cuántos formas se pueden 20 dulces y 30 chocolates entre 6 niños si se quiere que Juan tenga al menos dos dulces y al menos 8 chocolates?

22. Sean $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ..., (x_9, y_9)\}$, nueve puntos de coordenadas enteras y tales que no hay tres de ellos coliniales. Prueba que existe al menos un triángulo formado por los puntos medios de 3 puntos de A cuyas coordenadas también son enteras.