Contenido

Lista de Figuras

Introducción.

Actualmente, las redes eléctricas conmutadas juegan un papel de suma importancia en una gran variedad de dispositivos, y en forma resaltante en los Convertidores de Potencia Conmutados DC–DC, constituyendose en un medio popular de generación automática de voltajes regulados constantes a la salida. Estos convertidores son de inmenso valor en un gran número de aplicaciones prácticas, empleándose en áreas tales como, comunicación, sistemas de procesamiento de datos, fuentes portátiles de energía, equipos de bioingeniería, fuentes de potencias ininterrumpidas, etc. Recientes requerimientos para un mejor funcionamiento, menor volumen y peso, demandan nuevas tecnologías y estrategias de control más sofisticadas

Los modelos de los circuitos comúnmente utilizados en los convertidores DC-DC, son los denominados “buck”, “boost” y “buck-boost”, también conocidos como convertidores DC-DC atenuador, amplificador y atenuador/amplificador, respectivamente.

Los modelos dinámicos que representa a cada uno de los anteriores convertidores, a pesar de su sencillez visual, cuentan con características especiales las cuales hacen el análisis y diseño del regulador discontínuo bastantes inusuales.

- El proceso pertenece a los modelos no lineales, denominados bilineales, sujeto a variaciones en su estructura.

- Los convertidores “boost” y “buck-boost” muestran una respuesta de sistema de fase no mínima, en el control directo del voltaje de salida en el capacitor.

- La clase de modelos considerados corresponden típicamente a sistemas dinámicos de parámetros inciertos (Sira–Ramírez, y colaboradores [36]).

- La representación de estos modelos promedio en tiempo discreto, esta dada por una representación de estados no-kalmaniana *Fliess, 1992* [9]

- Existen oscilaciones en la fuente de alimentación, las cuales estan ligadas al proceso e influyen sobre la acción de control.

Versiones simplificadas de estos convertidores de energía DC-DC pueden ser obtenidas por eliminación de los capacitores de almacenamiento (vea Severns y

Bloom [25]), los circuitos resultantes son conocidos, generalmente, como convertidores *derivados* (vea Rashid [23]). Más información respecto a los convertidores de energía DC–DC se observa en la reciente publicación de artículos editados por *Bose, 1992* [2].

El objetivo del presente trabajo es plantear diferentes métodos y algoritmos de control, para resolver el problema de la estabilización del voltaje de salida en los convertidores DC–DC, así como, diversas metodologías para satisfacer la necesidad de la adaptación en línea, de los parámetros de estos modelos.

La solución al problema planteado se elabora partir de dos enfoques diferentes, totalmente independientes, como lo son:

- En el **modelo continuo**, se aborda *la estabilización de la respuesta de fase no–mínima*, mediante la reinización del estado, y para la adaptación de sus parámetros se trabajo en forma conjunta con la técnica del *vector sobreparametrizado.* Para la *estabilización de la respuesta en fase mínima*, y la adaptación de los parámetros, del sistema se utilizo el *Diseño de Controladores basados en Pasividad*, y desde otro punto de vista para la adaptación se hizo uso de la técnica "del paso atrás" *Backstepping.*

- Y en el **modelo discreto**, mediante técnicas de *Discretización Exacta*, resolver el problema de la estabilización y seguimiento de señales, de los circuitos DC–DC, derivados.

Recientemente, ha sido propuesta una metodología para el diseño de controladores de sistemas no lineales, la cual aprovecha las restricciones físicas del sistema, y en particular sus propiedades energéticas. La técnica, conocida como el *diseño de controladores basados en pasividad*, consiste en una etapa de *moldeado de la energía* en la cual la energía total del sistema en lazo cerrado es modificada, y una fase de *inyección de amortiguamiento* en donde la disipación requerida es añadida al sistema a fin de asegurar su estabilidad asintótica. Esta metodología ha sido eficazmente empleada en la regulación de sistemas de Euler–Lagrange, tales como manipuladores robóticos (vea los trabajos de Takegaki y Arimoto [39], y los posteriores desarrollados por Ortega y Spong [22], Berghuis y Nijmeijer [1] y Brogliato *et al* [3]) y dispositivos electromecánicos (Ortega y Espinosa [20] y Ortega *et al* [21]). En base a la teoría de los modelos Euler–Lagrange, en el capítulo 1 de este trabajo, presentamos un modelaje Lagrangiano aproximado, el cual establece las características físicas relevantes de los modelos promedios de los convertidores de potencia DC–DC. En particular, demostramos que los modelos promedios tradicionales de los convertidores "boost", "buck-boost" y "buck" son sistemas Euler–Lagrange.

En el siguiente, capitulo 2, mostramos que el diseño de controladores basado en Pasividad puede ser efectuado como una técnica sistemática para la síntesis de funciones de razón de trabajo estabilizantes en los convertidores de potencia controlados por conmutación. Esto es consecuencia de las consideraciones previas de modelaje, en base al Capítulo 1, se propone un esquema en base a *Pasividad* para la estabilización de la dinámica promedio de los convertidores de potencia controlados vía PWM, en el mencionado capítulo 2. Los esquemas de control desarrollados para la regulación indirecta del voltaje de salida son extendidos, en el mismo Capítulo 2, a su versión adaptativa, a fin de considerar el caso en el cual la resistencia de carga, en cada uno de los convertidores, son magnitudes constantes pero enteramente desconocidas. Posteriormente para, finalizar el capítulo, se trabaja con el caso del sistema multivariable, mediante la inclusión del convertidor "Boost" en cascada.

En el capitulo 3, se propone, un método factible de compensación retroalimentada discontínua para llevar a cabo la regulación, de respuesta de fase no-mínima, en la trayectoria de del voltaje de salida, con la característica de estar inmersos en la presencia de valores de parámetros constantes pero desconocidos. En el capítulo 4, se presenta una estrategía muy diferente de retroalimentación adaptativa que se adoptó al recurrir a un método inspirado por la reciente introducción de la metodología del diseño del control, vía *un paso atras dinámico*. La adaptación a la técnica "un paso atras" fué desarrollada para la regulación de una gran mayoría de sistemas no–lineales de estados linealizados exhibiendo valores de parámetros constantes, pero no desconocidos.

Los convertidores DC–DC, son clasificados como circuitos de potencia de conmutación de frecuencia infinita (ver *Kassakian, 1991* [12]), denominada así debido, a la alta frecuencia de conmutación del dispositivo semiconductor con respecto a las frecuencia de las señales de entrada y salida del circuito. Tradicionalmente, la regulación retroalimentada de convertidores de potencia DC–DC para la estabilización o el seguimiento de señales es efectuada a través de estrategias de Modulación de Anchura de Pulso (PWM) o por la inducción de un régimen deslizante apropiado (vea Venkataramanan *et al* [40], Sira-Ramírez [26], y Sira-Ramírez y Rios–Bolívar [35]). En este contexto, en la etapa de diseño del control, son frecuentemente empleados los *modelos promedios de frecuencia infinita* (vea Middlebrook y Cúk [16]), a fin de obtener una versión suave de la función de razón de trabajo calculada (vea los trabajos realizados por Sira-Ramírez y sus colaboradores [35], [27], [28], [31] y [32]). Las características de funcionamiento del controlador PWM real, con respecto a aquellas predichas por el modelo promedio, dependen de la magnitud de la frecuencia de muestreo asociada con el ancho del pulso del modulador. Para bajas frecuencias de muestreo, las imprecisiones que se producen conducen a errores sustanciales en las tareas de estabilización y seguimiento.

Sin embargo, no se puede justificar enteramente el uso de modelos promedio para los convertidores de potencia derivados DC–DC. Primero, la sencillez de los modelos dinámicos no parecen requerir una simplificación mediante una cuestionable aproximación suave y, segundo, existe la posibilidad de efectuar una discretización exacta, la cual, aparte de de ser un proceso mucho más involucrado en la versión tradicional de los convertidores, evitaría los problemas relativos a la magnitud finita de la frecuencia de muestreo usada por el modulador de ancho de Pulso. Todo ésto afianzan la idea del diseño de controladores directos PWM y PFM (Modulación de Frecuencia de Pulso) basados en un modelo exacto en tiempo discreto de los convertidores derivados (vea Kassakian *et al* [12]). El desarrollo de tales controladores para la estabilización de la corriente de entrada, en las versiones derivadas de los convertidores "buck", "boost" y "buck–boost", se lleva a cabo en el Capítulos 5.

En el último Capítulo 5 se trata el problema de seguimiento de señales a través de la inclusión de modelos promedios, en tiempo discreto, para las trayectorias de la corriente de entrada regulada por PWM. Los modelos en tiempo discreto, naturalmente, resultan en representaciones de estado generalizadas (no–Kalmaniana) del sistema (ver Fliess [9]). Los modelos promedios propuestos conduce a un sintetizador de la razón de trabajo dinámico ,*explícito* y no lineal

El funcionamiento de cada uno de los controladores obtenidos, fué completamente examinado, mediante simulaciones, en la versión perturba de los modelos de los convertidores.

□ □ □

Capítulo 1

Modelos Promedios de Euler–Lagrange de los Convertidores DC–DC.

En este capítulo presentamos un modelaje Lagrangiano aproximado, el cual establece las características físicas relevantes de los modelos promedios de los convertidores de potencia DC–DC. En particular, demostramos que los modelos promedios tradicionales de los convertidores "boost", "buck-boost" y "buck" son sistemas de Euler–Lagrange. La aproximación consiste en primero establecer los parámetros de Euler–Lagrange del circuito eléctrico asociado a la topología correspondiente a cada una de las dos posibles posiciones del interruptor. Esta consideración inmediatamente nos conduce a observar que algunos de los parámetros de Euler–Lagrange permanecen invariantes con respecto a la posición del interruptor, mientras que otros son verdaderamente modificados. Un modelo promedio puede ser obtenido mediante la modulación de los términos variables, pertenecientes a los parámetros de Euler–Lagrange involucrados, a través de la razón de trabajo actuante. Los modelos promedios obtenidos coinciden, enteramente, con los conocidos *modelos de estados promedio* en convertidores de potencia DC–DC, introducidos por Middlebrook y Cuk [4, 18], y con los *modelos de frecuencia de conmutación infinita*, derivados por Sira-Ramírez [27]. Estas consideraciones tienen una consecuencia inmediata en la seleción correcta de una apropiada filosofiá de diseño del controlador, así como, para incluir las características dinámicas del interruptor. Empecemos por presentar algunas generalidades respecto a los circuitos eléctricos de Euler-Langrage (el lector se puede referir al libro de *Meisel* [14], donde el tópico es tratado con detalle).
□ □ □

1.1 Generalidades respecto a los Circuitos de Euler-Langrage.

La dinámica de Euler-Langrage de un circuito eléctrico, que no contiene acoplamientos magnéticos entre sus diferentes componentes, es clásicamente caracterizada por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F}_q \tag{1.1}$$

donde $\dot{q}$ es el vector de flujos de corrientes y q representa sus integrales temporales, o cargas eléctricas. El vector de cargas eléctricas constituye las *Coordenadas Generalizadas* que describen el circuito. Este vector se asume que consta de n componentes, representadas por $q_1, \ldots, q_n$. La función escalar $\mathcal{L}$ es el *Lagrangiano* del sistema, definido como la diferencia entre la *co-energía magnética* del circuito, denotada por $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$, y la *energía del campo eléctrico*, representada por $\mathcal{V}(q)$, ésto es:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \mathcal{T}(\dot{q}, q) - \mathcal{V}(q) \tag{1.2}$$

La función $\mathcal{D}(\dot{q})$ es la *cofunción de disipación de Rayleigh* del sistema. El vector denominado $\mathcal{F}_q = (\mathcal{F}_{q1}, \ldots, \mathcal{F}_{qn})$ representa los componentes ordenados del conjunto de las *funciones forzantes generalizadas*, o *fuentes de voltaje*, asociadas con las coordenadas generalizadas.

Así, las ecuaciones del circuito eléctrico son generalmente descritas por:

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F}_q \tag{1.3}$$

De ahora en adelante, haremos referencia al conjunto de funciones $(\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$ como los parámetros Euler–Lagrange del circuito [21], y simplemente representaremos al circuito $\sum$ mediante la cuadrúpla ordenada:

$$\sum = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F}) \tag{1.4}$$

□ □ □

1.2 Convertidor "Boost".

En esta sección derivaremos a través de consideraciones dinámicas de Euler–Lagrange el modelo promedio PWM del convertidor "boost". Demostraremos que, para este caso en particular, la *cofunción de disipación de Rayleigh* es modificada por la acción del interruptor a través del suministro de la corriente de entrada. Estas "inyecciones de amortiguamiento" suceden en una forma *modulada*, ya que involucran períodos de tiempo directamente referidos al valor muestreado de la *función de razón de trabajo.* Se puede proponer un modelo promedio PWM simplemente al multiplicar las "inyecciones de amortiguamiento" por un factor modulador que solamente involucre la función de razón de trabajo. El proceso de modulación debe ser efectuado en una forma *consistente*, es decir, bajo condiciones hipotéticas de saturación de la razón de trabajo para cualquier límite físicamente permisible, bajo, o alto, han de restablecerse las cofunciones originales de disipación, correspondiente a las dos topologías eléctricas intervinientes.

Modelo Regulado por Conmutación.

Considerando el convertidor"boost", regulado mediante conmutación, de la figura 1.1.

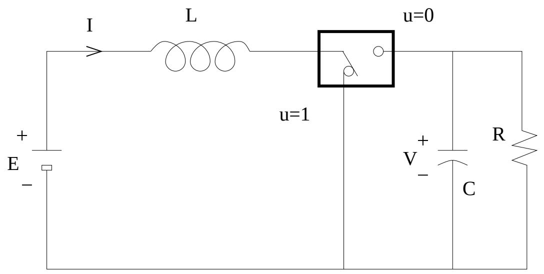

Figura 1.1: Circuito Convertidor "Boost".

Las ecuaciones diferenciales que describen el circuito son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-u)\frac{1}{L}\,x_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= (1-u)\frac{1}{C}\,x_1 - \frac{1}{R\,C}\,x_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde las variables x_1 y x_2 representan la corriente del inductor y el voltaje de salida en el capacitor, respectivamente. La variable de control u denota la función de la posición del interruptor y adopta valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$.

Una política de modulación de ancho de pulso PWM regula la función de la posición del interruptor u, y ésta puede ser especificada de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} 1 \text{ para} & t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 \text{ para} & t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \\ & t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde t_k representa un instante de muestreo; el parámetro T es el período fijo de muestreo, también llamado el *ciclo de trabajo*; los valores muestreados del vector de estado $x(t)$ del convertidor son denotados por $x(t_k)$. La función, $\mu(\cdot)$, es la *función de razón de trabajo.* Ha sido demostrado que tal función actúa ciertamente como una entrada externa de control en el modelo promedio PWM del convertidor (vea Sira-Ramírez [27]). El valor de la razón de trabajo, $\mu(t_k)$, determina, en cada instante de muestreo, t_k, el tiempo del ancho del pulso en uno como $\mu(t_k)\ T$ (durante este lapso de tiempo el interruptor permanece fijo en la posición representada por $u = 1$). Resulta evidente que la función de relación de trabajo, $\mu(\cdot)$, se encuentra limitada al intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real.

Formulación de Lagrange del Modelo Promedio PWM.

Para la formulación de la dinámica de Lagrange se considerará, en forma separada los dos circuitos asociados con cada una de las dos posibles posiciones del interruptor regulador, a fin de obtener mayor información sobre los efectos físicos de la acción del interruptor en término de los parámetros de Euler–Lagrange de las dos topologías del circuito. En orden de emplear la notación estandar, reescribimos la corriente de entrada x_1 en función de la derivada de la carga eléctrica circulante (q_L), como $\dot{q}_L$. También el voltaje del capacitor x_2 debe ser escrito como q_C/C, donde q_C es la carga eléctrica almacenada en el capacitor de salida.

Considerando entonces $u = 1$.

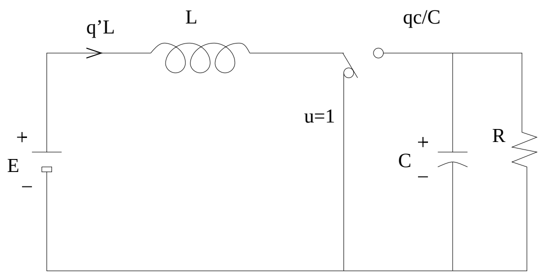

Figura 1.2: Circuito Convertidor “Boost” (u = 1).

Se obtienen dos circuitos desacoplados, tal como se muestra en la figura 1.2, y su correspondiente formulación de la dinámica de Lagrange es elaborada a continuación. Definimos $\mathcal{T}_1(\dot{q}_L)$ y $\mathcal{V}_1(\dot{q}_C)$ como la co-energía magnética y la energía del campo eléctrico del circuito, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ la cofunción de disipación de Rayleigh del circuito. Estas magnitudes son obtenidas como se expone seguidamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}\,L\,\dot{q}_L^2 \ \ ; \ \ \mathcal{V}_1(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_1(\dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R\,[-\dot{q}_C]^2 \ \ ; \ \ \mathcal{F}_{q_L} = E \ \ ; \ \ \mathcal{F}_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $\mathcal{F}_{q_L}$ y $\mathcal{F}_{q_C}$ son las *funciones de fuerzas generalizadas* asociadas con las coordenadas q_L y q_C, respectivamente.

Evidentemente, las ecuaciones de Euler–Lagrange vinculadas con estas definiciones conducen a las ecuaciónes (1.1), con $u = 1$; esto puede ser verificado a través del uso directo de las ecuaciones (1.2), ó (1.3), en el conjunto de parámetros de Euler–Lagrange dados en (1.3).

Considerando ahora el hecho de $u = 0$.

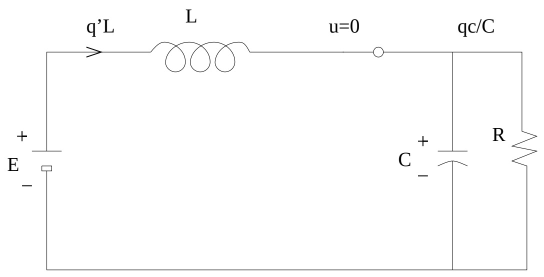

Figura 1.3: Circuito Convertidor "Boost" (u = 0).

El circuito resultante se muestra en la figura 1.3, y la formulación de su dinámica de Lagrange es desarrollada en forma similar al caso anterior. Definimos $\mathcal{T}_0(\dot{q}_L)$ y $\mathcal{V}_0(q_C)$ como la co-energía magnética y la energía del campo eléctrico del circuito, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ la cofunción de disipación de Rayleigh del circuito. Estas cantidades son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}\,L\,\dot{q}_L^2 \ \ ; \ \ \mathcal{V}_0(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R\,(\dot{q}_L - \dot{q}_C)^2 \ \ ; \ \ \mathcal{F}_{q_L} = E \ \ ; \ \ \mathcal{F}_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde, como antes, $\mathcal{F}_{q_L}$ y $\mathcal{F}_{q_C}$ son las *funciones de fuerzas generalizadas* asociadas con las coordenadas q_L and q_C, respectivamente.

Resulta claro que la aplicación de las definiciones dadas en (1.4) a la ecuación general de Euler–Lagrange (1.3) nos lleva a las ecuaciones (1.1), con $u = 0$, ésto puede ser verificado fácilmente.

Los parámetros de Euler–Lagrange de los dos circuitos, generados por los diferentes valores de posición del interuptor, resultan en idénticas funciones de co-energía magnética, energías de campo eléctrico y funciones forzantes. La acción de conmutación solamente modifica la cofunción de disipación de Rayleigh entre los valores $\mathcal{D}_0(\dot{q}_C)$ y $\mathcal{D}_1(\dot{q}_L,\dot{q}_C)$. Por lo tanto, la *estructura de disipación* del sistema es lo único directamente afectado por la función de posición del interruptor u.

Note, que de acuerdo a la política de conmutación PWM dada en (1.2), sobre cada intervalo de muestreo de período T, la cofunción de disipación de Rayleigh $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ es válida unicamente una fracción del período de muestreo dada por $\mu(t_k)$ mientras $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L,\dot{q}_C)$ permanece vigente el resto del período, es decir, una porción del período de muestreo igual a $(1-\mu(t_k))$.

Existen una gran variedad de formas en las cuales podriamos proponer un valor promedio de la cofunción de disipación de Rayleigh para el circuito de la forma (1.1), bajo la consideración de la política de conmutación de la forma (1.2). Una posible vía es proponer el siguiente conjunto de parámetros de Euler–Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}\,L\,\dot{q}_L^2 \;\;;\;\; \mathcal{V}_\mu(q_C)=\frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L,\dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R\left[(1-\mu)\dot{q}_L-\dot{q}_C\right]^2 \;\;;\;\; \mathcal{F}^\mu_{q_L}=E \;\;;\;\; \mathcal{F}^\mu_{q_C}=0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observe que en los casos donde μ toma los valores extremos de saturación $\mu=1$, ó $\mu=0$, recobramos, respectivamente, las cofunciones de disipación $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ en (1.3) y $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L,\dot{q}_C)$ en (1.4) a partir de la cofunción de disipación promedio planteada $\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L,\dot{q}_C)$. Similarmente, tal condición de "consistencia" se verifica por notar que:

$$\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L,\dot{q}_C)|_{\mu=0}=\mathcal{D}_0(\dot{q}_L,\dot{q}_C) \quad;\quad \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L,\dot{q}_C)|_{\mu=1}=\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$$

También, es fácil ver que la cofunción de disipación promedia de Rayleigh propuesta satisface una importante condición de acotamiento de la forma:

$$\min\{\mathcal{D}_0(\dot{q}_L,\dot{q}_C),\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)\} \;<\; \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L,\dot{q}_C) \;<\; \max\{\mathcal{D}_0(\dot{q}_L,\dot{q}_C),\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)\}$$

para cualquier μ que pertenezca al intervalo abierto (0,1).

Por lo tanto, $\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L,\dot{q}_C)$ puede ser considerada como un promedio vía PWM de la cofunción de disipación, $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ y $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L,\dot{q}_C)$.

Notamos que la función de Lagrange, asociada con los parámetros de Euler–Lagrange promedios ya definidos, permanece invariante con respecto a la posición del interruptor. No obstante, a objeto de mantener la consistencia en la notación empleada, denotaremos ésto por:

$$\mathcal{L}_\mu=\mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L)-\mathcal{V}_\mu(q_C)=\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2 \tag{1.6}$$

Entonces, procedemos, usando las ecuaciones de Euler–Lagrange (1.3), a obtener las ecuaciones diferenciales que definen el modelo promedio PWM correspondiente a los parámetros promedios de Euler–Lagrange propuestos en (1.5). Tales ecuaciones son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial \dot{q}_L}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial q_L} &= -\frac{\partial \mathcal{D}_\mu}{\partial \dot{q}_L} + \mathcal{F}^{\mu}_{q_L} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial \dot{q}_C}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial q_C} &= -\frac{\partial \mathcal{D}_\mu}{\partial \dot{q}_C} + \mathcal{F}^{\mu}_{q_C}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

La evaluación de (1.7) resulta en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
L\ddot{q}_L &= -(1-\mu)R\left[(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C\right] + E \\
\frac{q_C}{C} &= R\left[(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C\right]
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

el cual puede ser reescrito, despues de sustituir la segunda ecuación de (1.8) en la primera, como:

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_L &= -(1-\mu)\frac{q_C}{LC} + \frac{E}{L} \\
\dot{q}_C &= -\frac{1}{RC}q_C + (1-\mu)\dot{q}_L
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Empleando $z_1 = \dot{q}_L$ y $z_2 = q_C/C$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -(1-\mu)\,\frac{1}{L}z_2 + \frac{E}{L} \\
\dot{z}_2 &= (1-\mu)\,\frac{1}{C}z_1 - \frac{1}{RC}z_2
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

donde hemos denotado por z_1 y z_2 los *valores promedios* de la corriente de entrada y del voltaje de salida del capacitor, respectivamente, del convetidor "boost" regulado mediante PWM . Establecemos esta distinción con respecto a las variables no promediadas x_1 y x_2 de forma tal que las variables de estado asociadas con el modelo promedio PWM no sean erróneamente confundidas con la variables *efectivas* del circuito.

Note que la dinámica promedio propuesta coincide con el modelo de estado promedio desarrollado por Middlebrook y Cuk [18], y por Cuk [4], y con el modelo de frecuencia de conmutación infinita, encontrado en Sira-Ramírez [27]. Para obtener el modelo promedio (1.10), uno simplemente reemplaza la función de posición del interruptor, u, en (1.1) por la función de la razón de trabajo μ y las variables efectivas de estado x_1, x_2 por sus valores promedios, z_1, z_2.

Para facilidad se empleará la siguiente representación matricial de (1.10):

$$\mathcal{D}_B \dot{z} - (1-\mu)\mathcal{J}_B z + \mathcal{R}_B z = \mathcal{E}_B \tag{1.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_B &= \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{J}_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \\
\mathcal{R}_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{E}_B = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Concluiremos esta sección con la observación de que, como hemos esperado, la dinámica promedio del circuito (1.11) satisface la siguiente ecuación de balance de energía:

$$\underbrace{H(t) - H(0)}_{\text{energía almacenada}} + \underbrace{\frac{1}{RC^2}\int_0^t q_C^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{energía disipada}} = \underbrace{\int_0^t \dot{q}_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{energía suministrada}}$$

donde $H(t) = (z^T \mathcal{D} z)/2 = \mathcal{T}_\mu + \mathcal{V}_\mu$ es la *energía total* del modelo promedio del circuito. Esto se obtiene tomando la derivada con respecto al tiempo de $H(t)$ a lo largo de las trayectorias de (1.11) y notando que $\mathcal{J}_B$ es una matriz anti-simétrica. La ecuación de balance de energía también revela que las "fuerzas" $(1-\mu)\mathcal{J}_B z$, que aparecen en (1.11) no efectúan trabajo alguno.

Realización Ideal del Modelo Promedio PWM.

Es fácil visualizar que el modelo promedio (1.10) tiene una interpretación de teoría de circuitos al permitir que la magnitud $(1-\mu)z_2$, en la primera ecuación, represente una *fuente de voltaje controlada* y que el valor $(1-\mu)z_1$, en la segunda ecuación, se asuma como una fuente de corriente controlada.

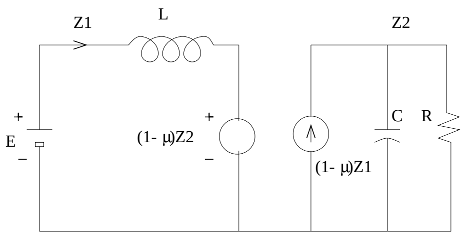

Figura 1.4: Circuito Equivalente del Modelo Promedio PWM del Convertidor "Boost".

La figura 1.4 presenta el circuito ideal equivalente que describe el modelo promedio PWM. En él podemos observar que un "cuadripólo" efectua la conexión entre los circuitos de "entrada" y "salida", y efectivamente reemplaza, en una forma promedio, el dispositivo de conmutación. Los siguientes parrafos demuestran la naturaleza de *transformador ideal* de tal cuadripólo.

Considere el cuadripólo aislado constituido por las fuentes ideales controladas, como se muestra en la figura 1.5.

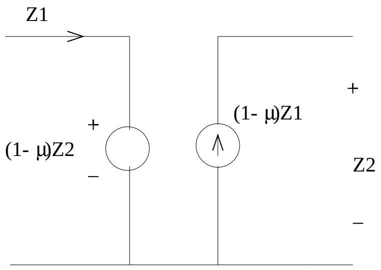

Figura 1.5: Transformador Ideal que Representa la Función Promedio PWM de Posición del Interruptor.

Note que la potencia de entrada (promedio) al cuadripólo, expresada como el producto de la corriente de entrada promedio z_1 por el voltaje promedio de entrada, $(1-\mu)z_2$, está dada por:

$$P_{\text{entrada}} = \overbrace{z_1}^{\text{corriente de entrada}} \quad \overbrace{(1-\mu)z_2}^{\text{voltaje de entrada}} \tag{1.13}$$

Por otro lado, la potencia de salida (promedio) entregada por el cuadripólo, escrita como el producto de la corriente de salida promedio, $(1-\mu)z_1$, por el voltaje de salida, z_2, es:

$$P_{\text{salida}} = \overbrace{(1-\mu)z_1}^{\text{corriente de salida}} \quad \overbrace{z_2}^{\text{voltaje de salida}} \tag{1.14}$$

en otras palabras, el cuadripólo es un dispositivo ideal de transferencia de potencia (promedio) que satisface:

$$P_{\text{entrada}} = P_{\text{salida}} \tag{1.15}$$

El voltaje de entrada promedio al cuadripolo, $(1-\mu)z_2$, está amplificado al valor z_2 en la salida, mientras que la corriente de entrada al cuadripólo, z_1, es atenuada al valor $(1-\mu)z_1$ en la salida. Así el dispositivo de conmutación ha sido efectivamente reemplazado por un *transformador ideal* con una *razón de cambio* dada por $(1-\mu)$.

Algunos Puntos Relevantes.

Finalizamos esta sección estableciendo tres hechos de suma importancia. Primero que todo, es bien conocido que la representación diferencial de entrada-salida del modelo promedio PWM del convertidor "boost" claramente resulta en un sistema de fase no–mínima cuando la salida a regular es referida al voltaje promedio de salida en el capacitor. En otras palabras, la *dinámica de los ceros* asociada con el punto de equilibrio, físicamente posible, de tal variable de salida es inestable. Segundo, la representación de entrada-salida que se obtiene cuando tomamos como salida la corriente promedio de entrada, resulta en un sistema localmente de fase mínima. Finalmente, establecemos que dado un valor de equilibrio del voltaje promedio de salida, digamos V_d, este corresponde a un único punto de equilibrio, I_d, de la corriente promedio de entrada. Estos factores son relevantes para la justificación del esquema de regulación retroalimentada *indirecta* representado en el siguiente capítulo. Estos resultados también pueden ser encontrados en Sira-Ramírez y Lischinsky-Arenas [31], desde un punto de vista distinto.

Consideremos primero el caso donde el voltaje promedio de salida del capacitor z_2 es visto como la salida del modelo promedio PWM (1.10). Una correcta eliminación de z_1 del conjunto de ecuaciones diferenciales (1.10) conlleva a la siguiente representación diferencial no lineal de entrada–salida:

$$\ddot{z}_2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{\dot{\mu}}{1-\mu}\right)\dot{z}_2 + \frac{1}{LC}\left[(1-\mu)^2 + \frac{L}{R}\frac{\dot{\mu}}{1-\mu}\right] z_2 = (1-\mu)\frac{E}{LC} \tag{1.16}$$

La "dinámica de los ceros" en el punto de equilibrio $z_2 = V_d$, asociada con esta representación entrada–salida, se obtiene al tomar $\dot{z}_2 = 0$ y $\ddot{z}_2 = 0$ (ver Fliess [8]). La ecuación diferencial resultante describe la "dinámica remanente" de la función de razón de trabajo μ:

$$\dot{\mu} = \frac{R(1-\mu)^2}{LV_d}\left[E - (1-\mu)V_d\right] \tag{1.17}$$

Los puntos de equilibrio de (1.17) estan dados por:

$$\mu = 1 \quad ; \quad \mu = 1 - \frac{E}{V_d} \tag{1.18}$$

El valor de equilibrio $\mu = U = 1 - E/V_d$ tiene un sentido físico, proporcionando $V_d > E$. Este hecho confirma el carácter "amplificador" del convertidor "boost". Sin embargo, el diagrama de fase de la ecuación (1.17), expuesto en la figura 1.6 revela la inestabilidad de este valor de equilibrio.

Concluimos que el modelo promedio PWM del convertidor "boost", con el voltaje promedio del capacitor z_2 representando a la salida, es un *sistema de fase no–mínima.*

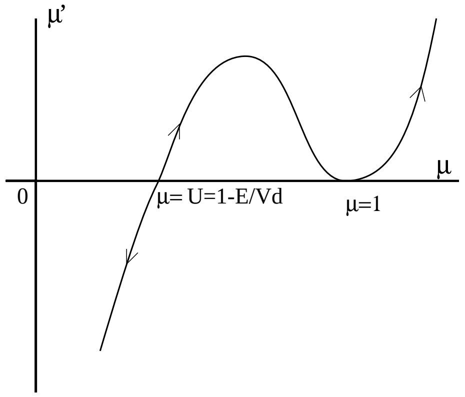

Figura 1.6: Dinámica de los Ceros del Convertidor "Boost", al Tomar Como Salida al Voltaje Promedio.

Considerando ahora la salida del circuito dada por la corriente promedio de entrada, z_1. Obtenemos la siguiente representación entrada-salida para el sistema promedio:

$$\ddot{z}_1 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{\dot{\mu}}{1-\mu}\right) \dot{z}_1 + \left[(1-\mu)^2 \frac{1}{LC}\right] z_1 = \frac{E}{L}\left(\frac{1}{RC} + \frac{\dot{\mu}}{1-\mu}\right) \tag{1.19}$$

La "dinámica de los ceros" en el punto de equilibrio $z_1 = I_d$, asociada con la representación anterior, viene dada por:

$$\dot{\mu} = \frac{1-\mu}{RCE}\left[(1-\mu)^2 RI_d - E\right] \tag{1.20}$$

donde sus puntos de equilibrio son:

$$\mu = 1 \quad ; \quad \mu = 1 - \sqrt{\frac{E}{RI_d}}; \quad \mu = 1 + \sqrt{\frac{E}{RI_d}} \tag{1.21}$$

El valor de equilibrio, $\mu = U = 1 - \sqrt{E/RI_d}$, físicamente admisible, permite que RI_d, el voltaje en estado estacionario a través de la resistencia de carga, satisfaga $RI_d > E$, lo cual ratifica, una vez más, el carácter "amplificador" del convertidor "boost". La figura 1.7 muestra el diagrama de fase de la ecuación (1.20), donde se puede observar que este punto de equilibrio es localmente estable. Esto nos lleva a deducir que esta representación de entrada-salida constituye un *sistema de fase mínima.*

Seguidamente estableceremos la relación existente entre el equilibrio del voltaje promedio de salida y la corriente promedio de entrada. Para ello asumimos una razón de trabajo constante $\mu = U$. Es fácil conseguir, a partir del modelo promedio PWM en (1.10), que los correspondientes valores de equilibrio para la corriente

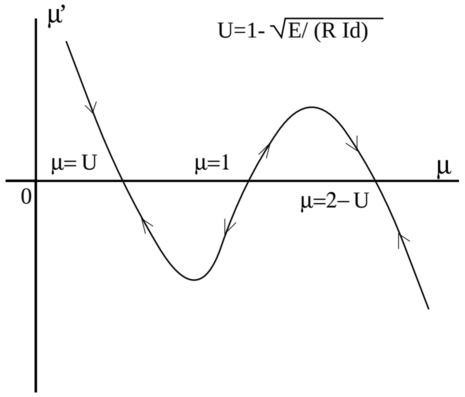

Figura 1.7: Dinámica de los Ceros del Convertidor "Boost", al Tomar Como Salida a la Corriente Promedio.

promedio de entrada, denotada por I_d, y el voltaje promedio de salida, denotado por V_d, estan dados por:

$$I_d = \frac{E}{(1-U)^2 R} \quad ; \quad V_d = \frac{E}{1-U} \tag{1.22}$$

En adelante, dado un valor de equilibrio deseado V_d para el voltaje de salida, el cual corresponde a una magnitud constante de la razón de trabajo $\mu = U$, el *único* punto de equilibrio para la correspondiente corriente promedio de entrada es:

$$I_d = \frac{V_d}{R(1-U)} = \frac{1}{RE} V_d^2 \tag{1.23}$$

Esto significa que si deseamos regular z_2 a un punto de equilibrio V_d el cual corresponde a un valor conocido en estado estacionario U de la función de la razón de trabajo μ, entonces, tal regulación puede efectuarse en forma *indirecta* a través de la estabilización de la corriente de entrada promedio z_1 al valor de equilibrio I_d calculado de (1.23).
□ □ □

1.3 Convertidor "Buck–Boost".

En esta sección obtendremos, empleando los formalismos Lagrangianos, el modelo promedio PWM para el caso del convertidor "buck–boost". Se mostrará que la co-función de disipación de Rayleigh y una de las *funciones forzantes externas*, asociada con una coordenada generalizada particular del circuito, son afectadas por la acción de conmutación, mientras el resto de los parámetros de Euler–Lagrange permanecen totalmente invariantes. Los parámetros promedios de Euler–Lagrange correspondientes son planteados utilizando, nuevamente, la función de razón de trabajo como una función de modulación. Este procedimiento da lugar a una cofunción de disipación Rayleigh promedio, similar a la obtenida en el caso del convertidor "boost", y a una fuente externa de voltaje promedio cuya amplitud es modulada por la razón de trabajo.

Modelo Regulado mediante Conmutación.

Consideremos el circuito del convertidor "buck–boost" regulado mediante un interruptor, que se muestra en la figura 1.8.

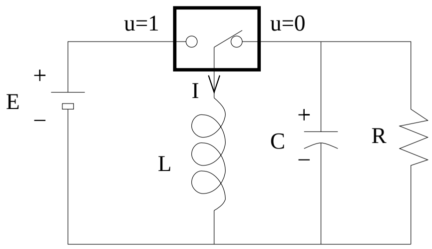

Figura 1.8: Circuito Convertidor "Buck–Boost".

Las ecuaciones diferenciales que describen el circuito estan dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1-u)\,\frac{1}{L}x_2 + u\frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= -(1-u)\,\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde x_1 y x_2 representan, respectivamente, la corriente de entrada en el inductor y el voltaje de salida en el capacitor. La cantidad positiva E es el valor constante de la fuente externa de voltaje. La variable u indica la posición del conmutador que actúa como una entrada de control tomando valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. Asumimos que una política de regulación PWM de la forma (1.2) determina la posición del interruptor como una función del tiempo.

Formulación de Lagrange, Modelo Promedio PWM.

Como en el caso previo, analizamos, en forma individual, los parámetros de Euler–Lagrange de los dos circuitos asociados con cada uno de las dos posibles posiciones del interruptor regulador.

Consideremos entonces, el caso cuando $u = 1$. Los parámetros de Euler–Lagrange del circuito resultante estan dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}\,L\,\dot{q}_L^2 \quad ; \quad \mathcal{V}_1(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_1(\dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R\,[-\dot{q}_C]^2 \quad ; \quad \mathcal{F}^1_{q_L} = E \quad ; \quad \mathcal{F}^1_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Cuando $u = 0$, los correspondientes parámetros de Euler–Lagrange son entonces los siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}\,L\,\dot{q}_L^2 \quad ; \quad \mathcal{V}_0(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R\,(-\dot{q}_L - \dot{q}_C)^2 \quad ; \quad \mathcal{F}^0_{q_L} = 0 \quad ; \quad \mathcal{F}^0_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Los parámetros de Euler–Lagrange de los dos circuitos, generados por las diferentes posiciones del interruptor, poseen idénticas funciones de coenergía magnética y energía de campo eléctrico. Vemos que la acción de conmutación varía la cofunción de disipación de Rayleigh entre los valores $\mathcal{D}_0(\dot{q}_C)$ y $\mathcal{D}_1(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$, así como también la función forzante externa, asociada con la coordenada generalizada q_L, entre las magnitudes $\mathcal{F}^1_{q_L} = E$ y $\mathcal{F}^0_{q_L} = 0$. Por lo tanto, la *estructura de disipación* y la fuerza forzante de entrada al sistema, son los únicos parámetros de Euler–Lagrange afectado por la posición del conmutador. La variación de estos parámetros necesita ser promediada cuando el circuito experimenta una política de regulación PWM de la forma (1.2).

Empleando los mismos argumentos, expuestos en las secciones previas, procedemos a definir los parámetros promedios de Euler–Lagrange de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}\,L\,\dot{q}_L^2 \quad ; \quad \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R\,[-(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C]^2 \quad ; \quad \mathcal{F}^\mu_{q_L} = \mu\,E \quad ; \quad \mathcal{F}^\mu_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Observe que en este casos cuando μ adopta los valores extremos físicamente permisibles $\mu = 1$ y $\mu = 0$, recuperamos, de la cofunción de disipación promedio de Rayleig propuesta en (1.4), las cofunciónes de disipación encontradas en (1.2) y (1.3), respectivamente. Similarmente, las funciones forzantes externas consideradas en (1.2) y (1.3) son inmediatamente obtenidas de (1.4) cuando permitimos que μ tome los valores $\mu = 1$ y $\mu = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ y $\mathcal{F}^\mu_{q_L}$ pueden ser considerados como parámetros promedios PWM de Euler–Lagrange de los dos circuitos participantes.

La función de Lagrange, asociada con los parámetros promedios Euler–Lagrange previamente definidos, viene dada por:

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) - \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2}L\,\dot{q}_L^2 - \frac{1}{2C}q_C^2 \tag{1.5}$$

Las ecuaciones diferenciales que definen el modelo promedio PWM del convertidor "buck–boost" se consiguen al utilizar los parámetros promedios de Euler–Lagrange propuestos en (1.4) y la función de Lagrange (1.5) dentro el conjunto de las ecuaciones dinámicas de Euler–Lagrange (1.3). Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_L &= (1-\mu)R\left[-(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C\right] + \mu\, E \\ \frac{q_C}{C} &= R\left[-(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

Las ecuaciones (1.6) pueden ser reescritas como,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_L &= (1-\mu)\frac{q_C}{LC} + \mu\,\frac{E}{L} \\ \dot{q}_C &= -\frac{1}{RC}q_C - (1-\mu)\dot{q}_L \end{aligned} \tag{1.7}$$

Usando, como antes, $z_1 = \dot{q}_L$ y $z_2 = q_C/C$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (1-\mu)\,\frac{1}{L}z_2 + \mu\,\frac{E}{L} \\ \dot{z}_2 &= -(1-\mu)\,\frac{1}{C}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde z_1 y z_2 denotan la corriente de entrada promedio y el voltaje de salida promedio en el capacitor, respectivamente, del convertidor "buck–boost" regulado mediante PWM .

El modelo promedio (1.8) se obtiene simplemente al reemplazar la función de posición del interruptor, u, en (1.1) por la razón de trabajo μ y las variables de estado x_1, x_2 por sus valores promedios z_1, z_2.

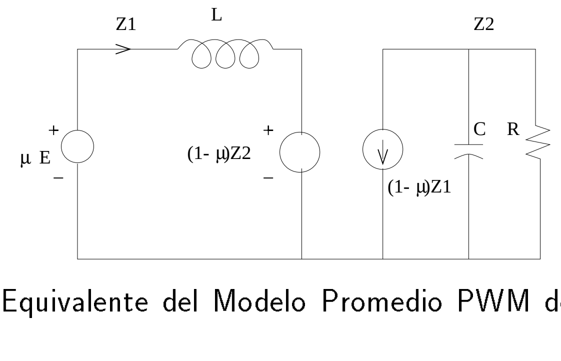

Figura 1.9: Circuito Equivalente del Modelo Promedio PWM del Convertidor "Buck–Boost".

La figura 1.9 representa el circuito equivalente a la dinámica del modelo promedio PWM del convertidor "buck–boost". Con respecto al circuito convertidor original, el dispositivo de conmutación es sustituido por un transformador ideal, el cual posee un voltaje de entrada polarizado en *inversa* y una fuente de voltaje variable en el tiempo cuya amplitud es modulada por la función de razón de trabajo.

Utilizaremos la siguiente representación matricial de (1.8):

$$\mathcal{D}_{BB}\dot{z} + (1-\mu)\mathcal{J}_{BB}z + \mathcal{R}_{BB}z = \mu\mathcal{E}_{BB} \tag{1.9}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{BB} &= \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{J}_{BB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \\ \mathcal{R}_{BB} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{E}_{BB} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Algunos Puntos Relevantes.

En forma semejante al caso del convertidor "boost", uno puede fácilmente establecer el carácter de fase no–mínima del modelo promedio PWM del convertidor "buck–boost" cuando se toma el voltaje promedio en el capacitor z_2 como la salida del sistema. Por el contrario, cuando la salida del sistema es referida a la corriente promedio de entrada del inductor, z_1, el sistema resultante se distingue por ser localmente de fase mínima.

Dada una función de razón de trabajo constante $\mu = U$, es fácilmente deducible de las ecuaciones del modelo promedio PWM en (1.8) que los correspondientes valores de equilibrio para la corriente promedio de entrada, denotada por I_d, y el voltaje promedio de salida, V_d, vienen dados por las siguientes expresiones:

$$I_d = \left[\frac{U}{(1-U)^2}\right]\frac{E}{R} \quad ; \quad V_d = -\left(\frac{U}{1-U}\right)E \tag{1.11}$$

Esto significa que, dependiendo del valor particular de la función de razón de trabajo en estado estacionario, U, el convertidor "buck–boost" puede desempeñar, en régimen estacionario, el papel de "amplificador" o "atenuador", pero con la característica de inversión de polaridad en la carga.

A partir de (1.11) encontramos que, dado un valor de equilibrio deseado, V_d, para el voltaje de salida, el cual está ligado a un valor constante de la función de razón de trabajo $\mu = U$, entonces el *único* valor de equilibrio para la correspondiente corriente promedio de entrada, I_d, está dado por:

$$I_d = -\frac{V_d}{R(1-U)} = \left(\frac{V_d}{RE} - \frac{1}{E}\right)V_d \tag{1.12}$$

Esto nos indica que si nosotros deseamos regular z_2 para alcanzar un valor de equilibrio V_d el cual es conocido y corresponde a un valor de estado estable U de la función de razón de trabajo μ, entonces, la regulación puede establecerse *indirectamente* mediante la conducción de la corriente promedio de entrada z_1 al correspondiente valor de equilibrio I_d calculado de (1.12).

□ □ □

1.4 Convertidor "Buck".

A objeto de ser breves resumiremos todas las formulas relevantes y ecuaciones que conllevan al modelo promedio PWM del convertidor "buck", a través de la formulación de Euler–Lagrange. En este caso, las formulas presentadas muestran que únicamente la función forzante externa es modificada bajo la acción de conmutación mientras el resto de los parámetros de Euler–Lagrange no son afectados por los cambios de la topología en el circuito. Este hecho resulta en una función forzante externa promedio constituida por una función forzante variante en el tiempo modulada por la razón de trabajo.

Modelo del Convertidor "Buck"

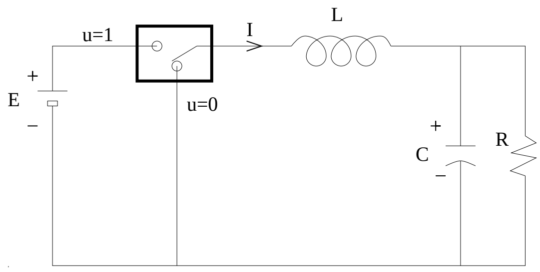

Figura 1.10: Circuito Convertidor "Buck".

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{L}x_2 + u\frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2\end{aligned} \qquad (1.1)$$

Parámetros de Euler–Lagrange del Convertidor "Buck" cuando $(u = 1)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\dot q_L) &= \frac{1}{2}\, L\, \dot q_L^2 \;\; ; \;\; \mathcal{V}_1(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_1(\dot q_C) &= \frac{1}{2} R \left(\dot q_L - \dot q_C\right)^2 \;\; ; \;\; \mathcal{F}^1_{q_L} = E \;\; ; \;\; \mathcal{F}^1_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Parámetros de Euler–Lagrange del Convertidor "Buck" cuando $(u = 0)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot q_L) &= \frac{1}{2}\, L\, \dot q_L^2 \;\; ; \;\; \mathcal{V}_0(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_0(\dot q_L, \dot q_C) &= \frac{1}{2} R \left(\dot q_L - \dot q_C\right)^2 \;\; ; \;\; \mathcal{F}^0_{q_L} = 0 \;\; ; \;\; \mathcal{F}^0_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Política de Regulación PWM para la Función de Posición del Interruptor, Convertidor "Buck".

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} 1 \text{ for } & t_k \le t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 \text{ for } & t_k + \mu(t_k)T \le t < t_k + T \end{cases} \\ & t_{k+1} = t_k + T \;\; ; \;\; k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Parámetros Promedios PWM de Euler–Lagrange.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu(\dot q_L) &= \frac{1}{2}\, L\, \dot q_L^2 \;\; ; \;\; \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_\mu(\dot q_L, \dot q_C) &= \frac{1}{2} R \left[\dot q_L - \dot q_C\right]^2 \;\; ; \;\; \mathcal{F}^\mu_{q_L} = \mu\, E \;\; ; \;\; \mathcal{F}^\mu_{q_C} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Lagrangiano para el Modelo Promedio PWM, Convertidor "Buck".

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{T}_\mu(\dot q_L) - \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2}\, L\, \dot q_L^2 - \frac{1}{2C}\, q_C^2 \tag{1.6}$$

Modelo Promedio PWM, Convertidor "Buck"

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -\frac{1}{L} z_2 + \mu\, \frac{E}{L} \\ \dot z_2 &= \frac{1}{C} z_1 - \frac{1}{RC} z_2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

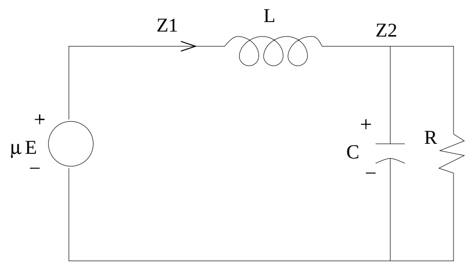

Figura 1.11: Circuito Equivalente del Modelo Promedio PWM del Convertidor "Buck".

Modelo Promedio PWM en Notación Matricial.

$$\mathcal{D}_b \dot{z} + (\mathcal{J}_b + \mathcal{R}_b)\, z = \mu \mathcal{E}_b \tag{1.8}$$

donde,

$$\mathcal{D}_b = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{J}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{R}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathcal{E}_b = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Representación Promedio Entrada–Salida, Convertidor "Buck"
(salida $= z_2$, **salida de fase mínima).**

$$\ddot{z}_2 + \frac{1}{RC}\dot{z}_2 + \frac{1}{LC} z_2 = \mu\, \frac{E}{LC} \tag{1.10}$$

Punto de Equilibrio Constante

$$\mu = U \quad ; \quad z_2 = V_d = UE \tag{1.11}$$

Representación de Entrada–Salida Convertidor "Buck"
(salida $= z_1$).

$$\ddot{z}_1 + \frac{1}{RC}\dot{z}_1 + \frac{1}{LC} z_1 = \frac{E}{L}\left(\dot{\mu} + \frac{1}{RC}\mu\right) \tag{1.12}$$

Punto de Equilibrio Constante.

$$\mu = U \quad ; \quad z_1 = I_d = U\frac{E}{R} \tag{1.13}$$

Dinámica de Ceros Asociada a la Corriente Promedio de Entrada.

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{RC}\left(\mu - \frac{RI_d}{E}\right) \tag{1.14}$$

Se ha mostrado que los modelos tradicionales de estado promedio, o modelos de frecuencia de conmutación infinita, de convertidores de potencia DC–DC son sistemas de Euler–Lagrange, para un conjunto razonable de parámetros promedios de Euler–Lagrange. Los modelos promedios PWM derivados fueron interpretados en términos de las realizaciones ideales del circuito incluyendo fuentes internas controladas y entradas externas moduladas. También se pudo observar la característica de fase no mínima que presentan los convertidores "boost" y "buck–boost" cuando se considera como salida el voltaje en el capacitor.

□ □ □

Capítulo 2

Metodología de Diseño en Base a Pasividad para Convertidores de Potencia DC–DC.

Como consecuencia de las consideraciones previas de modelaje, rapidamente podemos proponer una aproximación para la estabilización de la dinámica promedio de los convertidores de potencia, controlados mediante PWM, de el tipo "boost", "buck-boost" y "buck". Entonces, los sintetizadores de la razón de trabajo, o reguladores, son desarrollados a objeto de efectuar la estabilización indirecta del voltaje promedio de salida en el capacitor de los tres tipos de convertidores de potencia ya mencionados. Los controladores indirectos están basados, exclusivamente, en un esquema de *moldeado de energía mas inyección de amortiguamiento* (vea Ortega et al [21]).
□ □ □

2.1 Controladores en Base a Pasividad para Convertidores DC–DC.

La técnica del diseño de controladores basada en pasividad involucra una inversión parcial del estado de la dinámica promedio del convertidor. En particular, si se desea la regulación directa del voltaje de salida en el capacitor, la correspondiente corriente de entrada debe ser expresada en términos del voltaje de salida dado y de la razón de trabajo. A objeto de obtener el correspondiente sintetizador de la razón de trabajo, la expresión encontrada es forzada a satisfacer la dinámica deseada de la corriente de entrada. Este procedimiento resulta, debido a las características de fase no mínima de la razón de trabajo del sistema en el cual se a tomado como salida el voltaje en el capacitor, en un controlador dinámico inestable, razón por la cual la estabilización directa del voltaje de salida es imposible. Como es bien conocido, esquemas de regulación indirecta del voltaje de salida, basados en la estabilización de la corriente de entrada, no presentan tales inconvenientes de fase no mínima y son completamente realizables (vea Sira–Ramírez y Lischinsky–Arenas [31], y Sira–Ramírez *et al* [37]).

El funcionamiento de los controladores obtenidos, fué completamente examinado, mediante simulaciones, en sus versiones de modelos regulados a través de un conmutador y mediante una politica de PWM .

Circuito "Boost".

En esta sección utilizamos el método basado en pasividad a fin de diseñar dos controladores, el primero intenta la regulación "directa" del voltaje de salida , mientras el segundo se fundamenta en la regulación de la corriente de entrada con el propósito de estabilizar en forma "indirecta" el voltaje de salida. Resultando que, debido al comportamiento de fase no-mínima (con respecto al voltaje de salida del capacitor), en el primer caso la metodología conlleva a un controlador inestable, mientras que la segunda táctica de diseño nos evita este inconveniente.

Regulación Directa del Voltaje de Salida.

Supongase que se desea la regulación directa del voltaje de salida del capacitor a un valor constante, $z_{2d} = V_d$. Correspondiendo este objetivo al voltaje de salida z_2, la corriente de entrada requerida debe ser representada por una función $z_{1d}(t)$, que será determinada más adelante.

Considere las variables de error $\tilde{z}_1(t) = z_1(t) - z_{1d}(t)$ y $\tilde{z}_2(t) = z_2(t) - V_d$. Denotamos el vector de error promedio por $\tilde{z}$. Siguiendo la metodología basada en pasividad deseamos conducir la función de energía en lazo cerrado del sistema original a una función de energía deseada:

$$H_d = \frac{1}{2}\tilde{z}^T \mathcal{D}_B \tilde{z} \tag{2.1}$$

Esta selección es motivada por la forma de la función de energía total del modelo promedio del sistema, la cual como mostramos anteriormente está dada por:

$$H = \frac{1}{2} z^T \mathcal{D}_B z$$

La dinámica del vector de error promedio se puede expresar como:

$$\mathcal{D}_B \dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_B \tilde{z} + \mathcal{R}_B \tilde{z} = \mathcal{E}_B - (\mathcal{D}_B \dot{z}_d + (1-\mu)\mathcal{J}_B z_d + \mathcal{R}_B z_d) \tag{2.2}$$

Para asegurar la estabilidad asintótica efectuamos una *inyección de amortiguamiento* sobre (2.2) al definir el siguiente término deseado de disipación de Rayleigh del error:

$$\mathcal{D}_d = \frac{1}{2}\tilde{z}^T \mathcal{R}_{Bd}\tilde{z} = \frac{1}{2}\tilde{z}^T \left(\mathcal{R}_B + \mathcal{R}_{1B}\right)\tilde{z} \tag{2.3}$$

donde

$$\mathcal{R}_{1B} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_1 \; > \; 0 \tag{2.4}$$

Adicionando a ambos lados de la ecuación (2.2) los términos necesarios, se obtiene:

$$\mathcal{D}_B \dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_B \tilde{z} + \mathcal{R}_{Bd}\tilde{z} = \Psi \tag{2.5}$$

donde

$$\Psi = \mathcal{E}_B - \left(\mathcal{D}_B \dot{z}_d + (1-\mu)\mathcal{J}_B z_d + \mathcal{R}_B z_d - \mathcal{R}_{1B}\tilde{z}\right) \tag{2.6}$$

El moldeado de la energía más la inyección de amortiguamiento sería efectuada si podemos hacer $\Psi = 0$. En este caso, la estabilización de la dinámica del error debería satisfacer:

$$\mathcal{D}_B \dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_B \tilde{z} + \mathcal{R}_{Bd}\tilde{z} = 0 \tag{2.7}$$

Para explicar el razonamiento del método, considere el comportamiento de la energía total deseada H_d, cuya derivada en el tiempo a lo largo de la solución de (2.7) resulta en:

$$\dot{H}_d = -\tilde{z}\mathcal{R}_{Bd}\tilde{z} \;\leq -\alpha\, H_d \;<\; 0 \quad \forall\, \tilde{z} \neq 0 \tag{2.8}$$

donde α es una constate estrictamente positiva.

Concluimos que si la dinámica del error coincide con (2.7), el comportamiento del error es asintóticamente estable a cero.

Así, a objeto de satisfacer (2.7) debemos demandar, de (2.6), que:

$$\mathcal{D}_B \dot{z}_d + (1-\mu)\mathcal{J}_B z_d + \mathcal{R}_B z_d - \mathcal{R}_{1B}\tilde{z} = \mathcal{E}_B \tag{2.9}$$

Estas condiciones son escritas explícitamente como:

$$\begin{aligned} L\dot{z}_{1d} + (1-\mu)z_{2d} - (z_1 - z_{1d})R_1 \;&=\; E \\ C\dot{z}_{2d} - (1-\mu)z_{1d} + \frac{1}{R}z_{2d} \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

El problema, tal cual, consiste en, dada una constante deseada en el valor del voltaje de salida $z_{2d} = V_d$, se calcula una función acotada $z_{1d}(t)$, y una apropiada función de la razón de trabajo μ, tal que (2.10) sea satisfecha. Procedamos a eliminar la variable $z_1(t)$ de (2.10) como sigue. De la segunda ecuación de (2.10), obtenemos:

$$z_{1d}(t) = \frac{V_d}{R(1-\mu(t))} \tag{2.11}$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación de (2.10), uno consigue, despues de algunas manipulaciones algebráicas, una expresión para la dinámica de la función de razón de trabajo, de la forma:

$$\dot{\mu} = \frac{R(1-\mu)^2}{LV_d}\left[E - (1-\mu)Y + R_1\left(z_1 - \frac{V_d}{R(1-\mu)}\right)\right] \tag{2.12}$$

Este controlador estabiliza z_1 y z_2 a sus valores deseados z_{1d} y z_{2d}. Sin embargo, el controlador (2.12), desafortunadamente, no es factible debido a su carencia de estabilidad. En verdad la dinámica “remanente” o dinámica de los ceros, a él asociada resulta en:

$$\dot{\mu} = \frac{R(1-\mu)^2}{LV_d}\left[E - (1-\mu)V_d\right] \tag{2.13}$$

la cual coincide con la dinámica de los ceros ya calculada en (1.17), y que señalamos como inestable alrededor de su único punto de equilibrio con significado físico.

Regulación Indirecta del Voltaje de Salida.

La sección previa ha puesto de manifiesto que la única alternativa es efectuar el control *indirecto* del voltaje de salida del capacitor mediante la regulación de la corriente de entrada.

Supongase que deseamos regular z_1 a un valor constante $z_{1d} = I_d$. A fin de obtener un controlador retroalimentado factible para esta tarea, se procederá a eliminar la variable z_{2d} del conjunto de ecuaciones (2.10). Utilizando la primera ecuación de (2.10), $z_2(t)$ puede ser expresada como:

$$z_{2d}(t) = \frac{E + (z_1 - I_d)R_1}{(1-\mu(t))} \tag{2.14}$$

Sustituyendo (2.14) en la segunda ecuación de (2.10), uno obtiene, despues de algunas manipulaciones algebráicas:

$$\dot{\mu} = \frac{(1-\mu)}{C\big[E + (z_1 - I_d)R_1\big]}\Big\{(1-\mu)^2 I_d - \frac{E + (z_1 - I_d)R_1}{R} - \frac{R_1 C}{L}\left[E - (1-\mu)z_2\right]\Big\} \tag{2.15}$$

La dinámica “remanente” asociada con el controlador (2.15), se obtuvo al igualar z_1 y z_2 a sus respectivos valores deseados. Tal dinámica está dada por:

$$\dot{\mu} = \frac{1-\mu}{RCE}\Big[(1-\mu)^2 R I_d - E\Big] \tag{2.16}$$

La dinámica de los ceros (2.16) coincide con la dinámica de los ceros derivada en la ecuación (1.20), y la cual se mostró era localmente estable alrededor de su único punto de equilibrio con significado físico. Por lo tanto, el controlador indirecto (2.15) es completamente factible.

Los resultados anteriores son sintetizados en la siguiente proposición:

2.1 Proposición. *Considere la dinámica promedio (1.11) del convertidor "Boost",*

$$\mathcal{D}_B \dot{z} + (1-\mu)\mathcal{J}_B z + \mathcal{R}_B z = \mathcal{E}_B$$

con $z^T = [z_1, z_2] \in \mathcal{R}^2$*, siendo* z_1 *la corriente promedio en el inductor y* z_2 *el voltaje promedio en el capacitor. La cantidad* $\mu \in [0,1]$ *es la función de razón de trabajo.*

Se define un controlador no–lineal dinámico de estado retroalimentado como:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{2d} &= -\frac{1}{RC}\left\{ z_{2d} - \frac{V_d^2}{E z_{2d}}\left[E + R_1 \left(z_1 - \frac{V_d^2}{ER} \right) \right] \right\} \\
\mu(t) &= 1 - \frac{1}{z_{2d}(t)} \left[E + R_1 \left(z_1 - \frac{V_d^2}{ER} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

donde la condición inicial del controlador dinámico es seleccionada de tal forma que, $z_{2d}(0) > 0$ *y el valor de referencia constante para* z_2*, denotado por* V_d *es una cantidad estrictamente positiva. El parámetro* R_1 *es una constante seleccionada por el diseñador con la única restricción de ser estrictamente positiva. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (1.11)–(2.17) tiene un punto de equilibrio dado por:*

$$(z_1, z_2, z_{2d}) = \left(\frac{V_d^2}{RE}, V_d, V_d \right) \tag{2.18}$$

el cual es asintóticamente estable.

Algunos Puntos Relevantes.

El diseño del sintétizador dinámico de la razón de trabajo en base a la pasividad se realiza con la asunción de que el modelo promedio PWM del convertidor reproduce el comportamiento esencial del actual circuito regulado por conmutación. Esta suposición es solo aproximadamente válida debido al hecho, que en la práctica, la frecuencia de muestreo infinita, y sus correspondientes conmutaciones infinitamente rápidas, son imposibles de llevar a cabo. No obstante, para frecuencias de muestreo *suficientemente altas*, el controlador promedio diseñado puede ser utilizado para regular al actual convertidor conmutado con resultados satisfactorios.

El esquema en la figura 2.1 ha sido extensamente empleado para similares controladores retroalimentados, no lineales, dinámicos y su validez ha sido justificada, desde el punto de vista teórico (ver Sira-Ramírez, [27] y Sira–Ramírez *et al*, [32]) y, también, a través de extensivas simulaciones (ver, por ejemplo, Sira–Ramírez [27], y Sira-Ramírez and Lischinsky–Arenas [31], y Sira–Ramírez *et al* [37]).

A continuación, presentamos dos observaciones a objeto de visualizar el uso de tal esquema de retroalimentación PWM ,

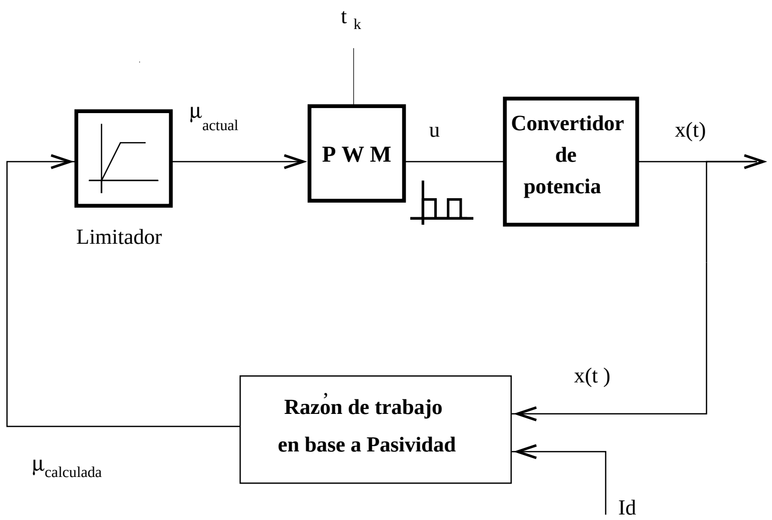

Figura 2.1: Esquema de Control Retroalimentado PWM, en Base a Pasividad, para la Regulación Indirecta del Voltaje de Salida en Convertidores de Potencia DC–DC.

- El sintetizador de razón de trabajo basado en el promedio genera una función de razón de trabajo *calculada*. Por ello, es enteramente posible que estos valores excedan los límites, físicos de la *efectiva* razón de trabajo requerida, necesariamente restringida al intervalo cerrado $[0, 1]$. Por esta razón, es necesario emplear un *limitador* en conjunción con el regulador dinámico obtenido, como se muestra en la figura 2.1. Como una consecuencia de esta limitación, solo la *estabilidad asintótica local* del sistema en lazo cerrado puede ser garantizada. Note que enormes desviaciones del estado inicial puede inducir efectos de saturaciones desestabilizantes los cuales no fueron considerados en los desarrollos anteriores.

- El sintetizador de la razón de trabajo (2.15) requiere en línea los valores promedios PWM de los estados z_1 y z_2 del circuito. Estos estados promedios pueden ser asintóticamente obtenidos a través de un proceso de filtraje paso bajo sobre los estados del circuito x_1 y x_2. Observe, sin embargo, que en el esquema en lazo cerrado presentado en la figura 2.1, los estados *efectivos* del circuito x_1, x_2, son utilizados por la retroalimentación, en vez de sus versiones filtradas z_1, z_2. Esto podría apuntar, de nuevo, que a grandes frecuencias de muestreo la diferencia entre usar uno u otro conjunto de estados es enteramente despreciable debido al efecto resultante sobre el sistema, el cual, por si solo, se comporta como un filtro paso bajo.

□ □ □

2.1 Simulación. Simulaciones del comportamiento en lazo cerrado del convertidor "boost" y el controlador indirecto PWM en base a la pasividad fueron desarrolladas sobre la siguiente versión perturbada del circuito convertidor "boost":

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-u)\,\frac{1}{L}x_2 + \frac{E+\eta}{L} \\ \dot{x}_2 &= (1-u)\,\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde η representa una entrada de perturbación estocástica externa que afecta directamente el comportamiento del sistema a través del valor de la fuente de voltaje. Note que esta entrada de perturbación es del tipo acoplado, esto es, se introduce al sistema de ecuaciones a través de un canal de entrada de campo vectorial, dado por $[1/L \quad 0]^T$ el cual no está en el rango del espacio del canal de entrada del control, dado por el vector de campo $[1/Lx_2 \quad 1/Cx_1]^T$. La magnitud del ruido fué seleccionada, aproximadamente, del 20% del valor de E.

Los valores de los parámetros del circuito fueron tomados de los siguientes valores "típicos":

$$C = 20\ \mu\text{F} \ \ ; \ \ R = 30\ \Omega \ \ ; \ \ L = 20\ \text{mH} \ \ ; \ \ E = 15\ \text{V}$$

La frecuencia de muestreo para la política PWM fué ubicada en 3 KHz. La razón de trabajo fué obtenida de un proceso de muestreo de la salida, $\mu(t)$, del sintetizador de la razón de trabajo derivado anteriormente. A objeto de evitar la contrucción de los filtros paso–bajos, en lugar de usar las variables de estado promediadas z_1, z_2 para retroalimentarlas sobre la sintetizador, empleamos los actuales estados controlados x_1, x_2 en las expresiones del controlador. La corriente promedio de entrada deseada en el inductor se ubicó en $I_d = 3.125$ Amp., con la razón de trabajo en estado estacionario $U = 0.6$, lo cual corresponde a un voltaje promedio de salida en el capacitor, $z_2 = V_d = 37.5$ Volts.

La figura 2.2 muestra las trayectorias de estado en lazo cerrado correspondientes al sintetizador de la razón de trabajo desarrollado para el convertidor "boost". Esta figura también presenta la trayectoria de la función de razón de trabajo, así como una realización generada por la computadora de la señal de perturbación estocástica η.

Como puede verse en las simulaciones, el controlador propuesto ejecuta la estabilización indirecta del voltaje de salida alrededor del valor de equilibrio deseado mientras exhibe un alto grado de robustez con respecto a la señal de perturbación estocástica externa.

□ □ □

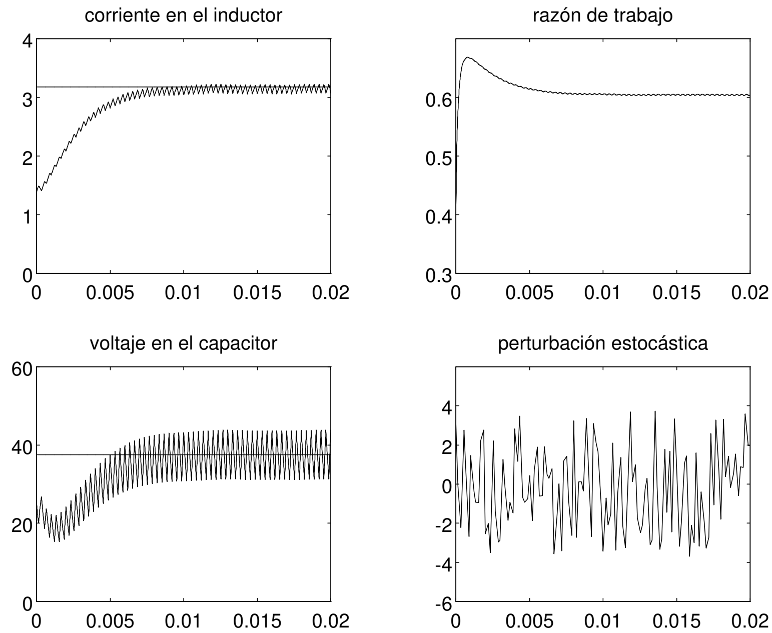

Figura 2.2: Simulaciones Resultantes para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Indirecto PWM, en el Convertidor "Boost" Perturbado.

Convertidor "Buck–Boost".

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en el caso previo uno concluye que, para el convertidor "buck–boost", una política de regulación directa del voltaje de salida no es factible debido al fenómeno de fase no-mínima. Así, escribimos abajo la expresión para el controlador retroalimentado dinámico que efectúa en forma indirecta la regulación del voltaje de salida del capacitor, a un punto de equilibrio deseado V_d, a través de la estabilización de la corriente de entrada a un valor constante I_d, calculado en términos de V_d como en la ecuación (1.12):

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \frac{1-\mu}{C\Big[E+(z_1-I_d)R_1\Big]}\Big\{(1-\mu)^2 I_d - \frac{\mu E+(z_1-I_d)R_1}{R} - \\
&- \frac{R_1 C}{L}\left[\mu E + z_2(1-\mu)\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

La dinámica de los ceros asociada con el controlador (2.21) está dada por:

$$
\dot{\mu} = \frac{(1-\mu)}{RCE}\Big\{(1-\mu)^2 R I_d - \mu E\Big\} \tag{2.21}
$$

la cual tiene tres puntos de equilibrio:

$$
\mu = 1 \quad ; \quad \mu = 1 + \frac{E}{2RI_d} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2RI_d}\right)^2 + \frac{E}{RI_d}} \tag{2.22}
$$

Dos de los puntos de equilibrio ($\mu = 1$, y el correspondiente al signo mas de la raíz cuadrada) son inestables mientras el restante, a parte de ser el único con significado físico, es además, localmente asintóticamente estable.

De manera más formal:

2.2 Proposición. *Considere la dinámica promedio (1.9) del convertidor "buck–boost",*

$$\mathcal{D}_{BB}\dot{z} + (1-\mu)\mathcal{J}_{BB}z + \mathcal{R}_{BB}z = \mu\mathcal{E}_{BB}$$

con $z^T = [z_1, z_2] \in \mathcal{R}^2$, siendo z_1 la corriente promedio en el inductor y z_2 el voltaje promedio en el capacitor. La cantidad $\mu \in [0,1]$ es la función de razón de trabajo.

Se define un controlador no–lineal dinámico de estado retroalimentado como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2d} &= -\frac{1}{RC}\left\{z_{2d} + V_d\left(\frac{V_d}{E}+1\right)\left[\frac{E + R_1\left(z_1 - \frac{V_d}{R}(\frac{V_d}{E}+1)\right)}{E - z_{2d}(t)}\right]\right\} \\ \mu(t) &= \frac{z_{2d}(t) + R_1\left(z_1 - \frac{V_d}{R}(\frac{V_d}{E}+1)\right)}{z_{2d}(t) - E} \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde la condición inicial del controlador dinámico es seleccionada de tal forma que, $z_{2d}(0) < 0$ y el valor de referencia constante para z_2, denotado por $-V_d$ es una cantidad estrictamente negativa. El parámetro R_1 es una constante seleccionada por el diseñador con la única restricción de ser estrictamente positiva. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (1.9)–(2.23) tiene un punto de equilibrio dado por:

$$(z_1, z_2, z_{2d}) = \left(\frac{V_d}{R}(\frac{V_d}{E}+1), V_d, V_d\right) \tag{2.24}$$

el cual es asintóticamente estable.

Prueba El hecho que (2.24) es un punto de equilibrio de (1.9)–(2.23) es el resultado de una sustitución directa.

Definimos:

$$z_{1d} = \frac{V_d}{R}\left(\frac{V_d}{E}+1\right) \tag{2.25}$$

Note que z_{1d} y z_1 coinciden en el punto de equilibrio. Permitiendo que $\tilde{z}$ denote, como antes, la señal de error $z - z_d$. Podemos escribir (1.9) en terminos de la señal de error como:

$$\mathcal{D}_{BB}\dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_{BB}\tilde{z} + \mathcal{R}_{BBd}\tilde{z} = \psi \tag{2.26}$$

donde,

$$\psi = \mu\mathcal{E} - \left[\mathcal{D}_{BB}\dot{z}_d + (1-\mu)\mathcal{J}_{BB}z_d + \mathcal{R}_{BB}z_d - \begin{bmatrix} R_1\tilde{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \tag{2.27}$$

y $\mathcal{R}_{BBd}$ es una matriz definida positiva dada por:

$$\mathcal{R}_{BBd} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \quad ; \quad R_1 > 0 \tag{2.28}$$

La Expresión (2.27) es escrita explícitamente como:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -L\dot{z}_{1d} + (1-\mu)z_{2d} + R_1\tilde{z}_1 + \mu E \\ \psi_2 &= -C\dot{z}_{2d} - (1-\mu)z_{1d} - \frac{1}{R}z_{2d} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Usando (1.9)–(2.23) uno tiene $\psi_1 = 0$ y $\psi_2 = 0$. La estabilización resultante del error del sistema está dada por la dinámica asintóticamente estable:

$$\mathcal{D}_{BB}\dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_{BB}\tilde{z} + \mathcal{R}_{BBd}\tilde{z} = 0 \tag{2.30}$$

Utilizando como función de Lyapunov la energía total del error del sistema $H_d(t) = \frac{1}{2}\tilde{z}^T\mathcal{D}_{BB}\tilde{z} > 0$ obtenemos, que para alguna constante $\alpha > 0$, a lo largo de las trayectorias de (2.30) la siguiente relación es satisfecha:

$$\dot{H}_d(t) = -\tilde{z}^T\mathcal{R}_d\tilde{z} \leq -\alpha||\tilde{z}||^2 \tag{2.31}$$

donde α puede ser tomada como $\min\left\{R_1, \frac{1}{R}\right\}$. Concluimos que $H(t)$ es acotada y, por lo tanto, $\tilde{z}$ es una intregal cuadrática. Esto implica que $\tilde{z} \to 0$ asintóticamente.

La dinámica de los ceros asociada con el controlador dinámico propuesto es:

$$\dot{z}_{2d} = -\frac{1}{RC}\left[z_{2d} + V_d(\frac{V_d}{E} + 1)\frac{E}{E - z_{2d}}\right] \tag{2.32}$$

la cual tiene un punto de equilibrio asintótico sobre $z_{2d} = -V_d$ para toda condición inicial que satisface $z_{2d}(0) < 0$.

□ □ □

2.2 Simulación. También se desarrollaron simulaciones a objeto de efectuar la evaluación del comportamiento en lazo cerrado de un convertidor “buck–boost” regulado en forma indirecta. Los valores de los parámetros del convertidor fueron seleccionados en forma idéntica a aquellos considerados previamente en la simulación del convertidor “boost”. El modelo perturbado regulado por conmutación usado en las simulaciones fué tomado como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1-u)\,\frac{1}{L}x_2 + u\frac{E+\eta}{L}\\ \dot{x}_2 &= -(1-u)\,\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2\end{aligned} \tag{2.33}$$

La corriente promedio de entrada deseada en el inductor fué colocada al valor de equilibrio $z_{1d} = I_d = 1.875$ Amp., con una razón de trabajo en estado estacionario $U = 0.6$. Esto corresponde a un voltaje promedio de salida, $z_2 = V_d = -22.5$ Volts. Las trayectorias de los estados del convertidor, regulado, "buck-boost", la función de razón de trabajo, y la señal de perturbación estocástica η (aproximadamente 20% del valor de E) se exponen en la figura 2.3.

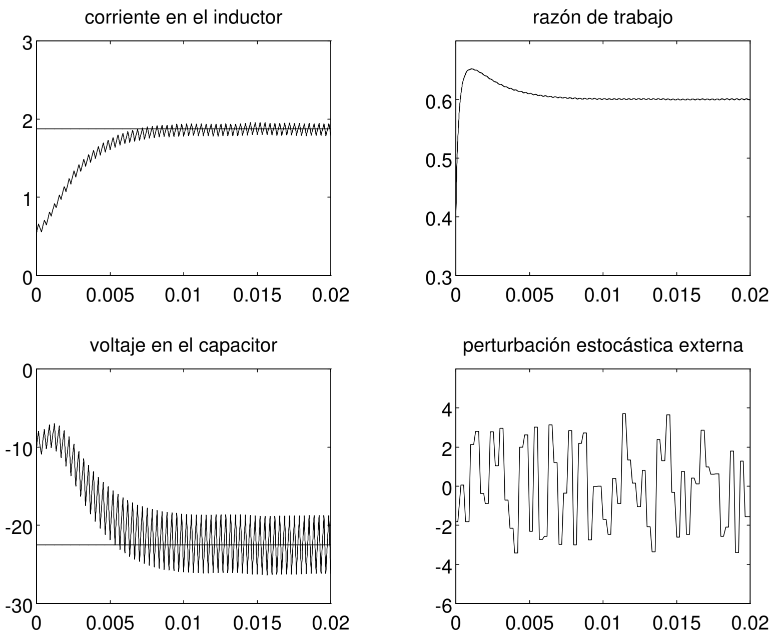

Figura 2.3: Simulaciones Resultantes para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Indirecto PWM, en el Convertidor "Buck–Boost" Perturbado.

En las simulaciones se puede observar el funcionamiento adecuado del controlador al igual que su robustez con respecto a la señal de perturbación estocástica externa. □ □ □

Convertidor "Buck".

Los procedimientos que conlleva al sintetizador de la razón de trabajo para el convertidor "buck" son similares a aquellos presentados para los otros convertidores. Unicamente apuntaremos que, contrariamente a los casos anteriores, el esquema de la regulación directa del voltaje de salida es factible debido a que el convertidor "buck" no exhibe dinámica de los ceros para esta salida. En este caso el sintetizador de la razón de trabajo es *estático*, en lugar de dinámico. Si denotamos, como antes, por V_d el voltaje de salida deseado en el capacitor, el controlador en base a la pasividad resulta en :

$$\mu = \frac{V_d}{E} - \frac{1}{ER_1}\left(z_1 - \frac{V_d}{R}\right) \tag{2.34}$$

Se ve fácilmente, por sustitución de z_1 en términos de z_2 y $\dot{z}_2$, que este controlador es justamente un controlador clásico "proporcional–derivativo".

El esquema de regulación indirecta del voltaje de salida resulta en un controlador dinámico cuyo comportamiento es asintóticamente estable a cero. Los detalles son omitidos y los resultados se presentan a continuación :

2.3 Proposición. *Considere la dinámica promedio (1.8) del convertidor "buck",*

$$\mathcal{D}_b \dot{z} + (\mathcal{J}_b + \mathcal{R}_b)\, z = \mu \mathcal{E}_b$$

con $z^T = [z_1, z_2] \in \mathcal{R}^2$, siendo z_1 la corriente promedio en el inductor y z_2 el voltaje promedio en el capacitor. La cantidad $\mu \in [0,1]$ es la función de razón de trabajo.

Se define un controlador no–lineal dinámico de estado retroalimentado como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2d} &= -\frac{1}{RC}\Big(z_{2d} - V_d\Big) \\ \mu(t) &= \frac{z_{2d}(t) - R_1\,(z_1 - V_d/R)}{E} \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde la condición inicial del controlador dinámico es seleccionada de tal forma que, $0 < z_{2d}(0) < E$ y el valor de referencia constante para z_2, denotado por V_d es una cantidad estrictamente positiva. El parámetro R_1 es una constante seleccionada por el diseñador con la única restricción de ser estrictamente positiva. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (1.8)–(2.35) tiene un punto de equilibrio dado por:

$$(z_1, z_2, z_{2d}) = \left(\frac{V_d}{R}, V_d, V_d\right) \tag{2.36}$$

el cual es asintóticamente estable.
□ □ □

2.3 Simulación. Las simulaciones fueron efectuadas para el esquema de regulación directa operando sobre un convertidor "buck" perturbado de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{L}x_2 + u\frac{E+\eta}{L} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde, al igual que los casos anteriores, η representa una señal de perturbación estocástica, pero esta vez de una magnitud aproximada del 10% de E. El voltaje promedio de salida deseado en el capacitor fué colocado en $V_d = 9$ Volts, lo cual corresponde a una razón de trabajo y corriente promedio de entrada, en estado estacionario, de $U = 0.6$ y $z_{1d} = I_d = 0.3$ Amp., respectivamente. En la figura 2.4 se muestran los resultados obtenidos.

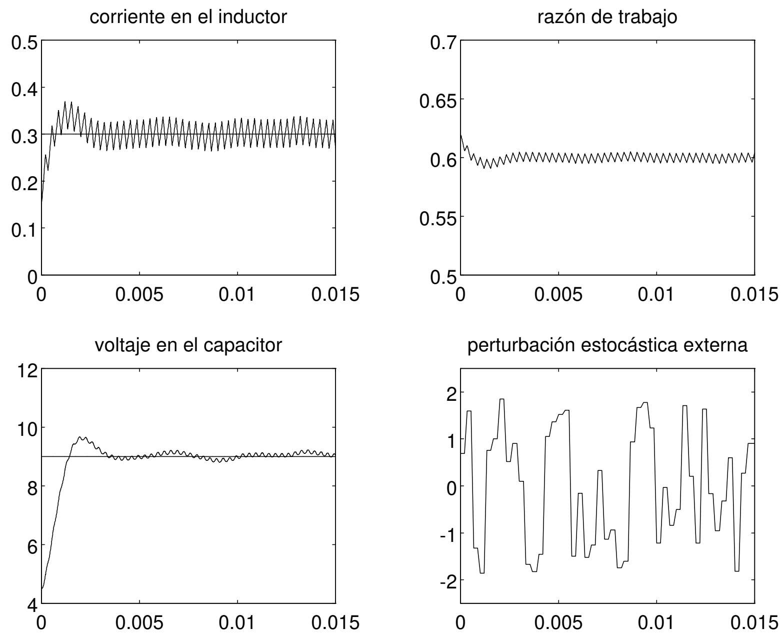

Figura 2.4: Simulaciones Resultantes para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Directo PWM, en el Convertidor "Buck" perturbado.

□ □ □

En resumen los sintetizadores de la razón de trabajo retroalimentados, motivados físicamente, fueron desarrollados para la estabilización indirecta del voltaje promedio de salida de los convertidores de potencia DC–DC de los tipos "boost", "buck–boost", y "buck". Los controladores retroalimentados dinámicos se fundamentan en la modificación de la función de energía total del modelo promedio del convertidor. Este procedimiento, aunado a las posibilidades de aumentar la estructura de disipación de los modelos promedios a través de útiles "inyecciones de amortiguamiento", conduce a un comportamiento en lazo cerrado asintóticamente estable en compañia de controladores localmente asintóticamente estables. El estudio muestra que la regulación directa del voltaje de salida conlleva a un controlador inestable en ambos convertidores "boost" y el "buck–boost". En el caso de convertidor "buck", sin embargo, ambos esquemas de regulación de voltaje; directa e indirectamente, son igualmente factibles debido a la ausencia de la dinámica de ceros en el primer caso y al correspondiente carácter de fase mínima en el segundo caso.

Los resultados obtenidos en las simulaciones, para todos los tipos de de convertidores considerados, fueron altamente alentadores.

□ □ □

2.2 Controladores Adaptativos en base a Pasividad para Convertidores DC–DC.

Frecuentemente, en el diseño de reguladores retroalimentados para los convertidores de potencia DC–DC se asume que las cargas en el convertidor y los parámetros asociados con los diversos componentes del circuito son perfectamente conocidos. Sin embargo, en la práctica, los errores de medida, efectos de envejecimiento e imperfecciones del modelado originan un conocimiento poco preciso sobre esos parámetros. Estos factores motivan la realización de una aproximación adaptativa para el diseño de controladores en las fuentes de potencia DC–DC.

El control adaptativo de fuentes de potencia DC–DC ha sido tratado, a partir de la linealización aproximada, por Sanders y Verghese en [24]. Estas técnicas se sustentan en consideraciones de estabilidad de Lyapunov para el diseño de controladores retroalimentados. Un punto de vista en base a una completa linealización de estado adaptativa fué propuesto por Sira-Ramírez *et al* en [37]. Un metodo de diseño adaptativo que combina apropiadamente linealización de entrada-salida, a través de la forma canónica de la observavilidad (ver Fliees [8]), y el procedimiento de diseño del *backstepping*, fué recientemente presentado por Sira-Ramírez *et al* en [36].

En esta siguiente parte del trabajo asumimos que las resistencias de carga, en los distintos convertidores, son valores constantes pero completamente desconocidos. Este tipo de situación se presenta comúnmente en varias aplicaciones prácticas de convertidores de potencia DC–DC. A fin de manejar este tipo de incertidumbre, desarrollamos versiones adaptativas de los controladores retroalimentados previamente elaborados. Enfatizamos que los resultados aquí presentados pueden ser extendidos, con relativa facilidad, a el caso de incertidumbres en el resto de los parámetros, L, C y E, del circuito del convertidor de potencia DC–DC.

Convertidor "Boost".

2.1 Proposición. *Considere la dinámica promedio (1.11) del convertidor "boost", donde $C > 0$, $L > 0$, $E > 0$ son constantes* conocidas *que representan la capacitancia, inductancia y el voltaje externo respectivamente, y $R > 0$ es la resistencia de carga* desconocida. *Se define un controlador* adaptativo *no lineal dinámico de estado retroalimentado como:*

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C}\Big\{z_{2d} - \frac{V_d^2}{Ez_{2d}}\Big[E + R_1\left(z_1 - \frac{V_d^2}{E}\hat{\theta}\right)\Big] + L\frac{V_d^2}{E}z_{2d}\left(z_2 - z_{2d}\right)\Big\} \\ \mu(t) &= 1 - \frac{1}{z_{2d}(t)}\left[E + R_1\left(z_1 - \frac{V_d^2}{E}\hat{\theta}\right) - L\frac{V_d^2}{E}z_{2d}\left(z_2 - z_{2d}\right)\right] \\ \dot{\hat{\theta}} &= -z_{2d}\left(z_2 - z_{2d}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la condición inicial del controlador dinámico es selecionada tal que, $z_{2d}(0) > 0$ y $\hat{\theta}(0) > 0$. El valor de referencia constante para z_2, denotado por V_d, es una cantidad estrictamente positiva. La cantidad $\hat{\theta}$ denota la estimación de $\frac{1}{R}$. El parámetro R_1 es una constante seleccionada por el diseñador con la restricción de ser estrictamente positiva. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (1.11),(2.1) tiene un punto de equilibrio dado por:

$$(z_1, z_2, z_{2d}, \hat{\theta}) = \left(\frac{1}{R}\frac{V_d^2}{E}, V_d, V_d, \frac{1}{R}\right) \tag{2.2}$$

el cual es asintóticamente estable.

Prueba Se puede verificar, por sustitución directa, que (2.2) representa un punto de equilibrio para el sistema en lazo cerrado. Se define :

$$z_{1d} = \frac{V_d^2}{E}\hat{\theta} \tag{2.3}$$

Note que z_{1d} y z_1 coincide en el punto de equilibrio. Dejando, otra vez, $z - z_d$ ser el vector de error $\tilde{z}$. En terminos de las señales de error, (1.11) es reescrita como:

$$\mathcal{D}_B\dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_B\tilde{z} + \mathcal{R}_{Bd}\tilde{z} = \psi \tag{2.4}$$

donde,

$$\psi = \mathcal{E} - \left[\mathcal{D}_B\dot{z}_d + (1-\mu)\mathcal{J}_B z_d + \mathcal{R}_{Bd}z_d - \begin{bmatrix} R_1\tilde{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \tag{2.5}$$

y $\mathcal{R}_{Bd}$ es una matriz definida positiva dada por:

$$\mathcal{R}_{Bd} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \quad ; \quad R_1 > 0 \tag{2.6}$$

La expresión (2.5) es escrita explícitamente como:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -L\dot{z}_{1d} - (1-\mu)z_{2d} + R_1\tilde{z}_1 + E \\ \psi_2 &= -C\dot{z}_{2d} + (1-\mu)z_{1d} - \frac{1}{R}z_{2d} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando (2.3) y (2.1) uno tiene $\psi_1 = 0$ y $\psi_2 = \tilde{\theta}z_{2d}$, donde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \frac{1}{R}$.

La estabilización resultante del error del sistema esta dada por la siguiente dinámica perturbada,

$$\mathcal{D}_B\dot{\tilde{z}} + (1-\mu)\mathcal{J}_B\tilde{z} + \mathcal{R}_{Bd}\tilde{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\theta}z_{2d} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Utilizando como función de Lyapunov la energía total de la estabilización del error del sistema mas la "energía" asociada con el error en la estimación del parámetro,

$$H_d(t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{z}^T\mathcal{D}_B\tilde{z} + \tilde{\theta}^2\right] \tag{2.9}$$

uno obtiene que a lo largo de las trayectorias de (2.8), la siguiente relación es satisfecha,

$$\dot{H}_d(t) = -\tilde{z}^T\mathcal{R}_d\tilde{z} + \tilde{\theta}\left[\dot{\tilde{\theta}} + z_{2d}\left(z_2 - z_{2d}\right)\right] \tag{2.10}$$

Usando la última ecuación en (2.1) y del hecho que $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ uno obtiene :

$$\dot{H}_d(t) = -\tilde{z}^T\mathcal{R}_d\tilde{z} \leq -\alpha||\tilde{z}^2|| \tag{2.11}$$

donde α puede ser selecionada como el $\min\left\{R_1, \frac{1}{R}\right\}$. Concluimos que $\tilde{z}$ y $\tilde{\theta}$ son acotadas y que $\tilde{z}$ es una integral cuadrática. Para mostrar que $\tilde{z} \to 0$ asintóticamente, se debe verificar que $\tilde{z}$ es uniformamente contínua. Para ello, es suficiente mostrar que $\dot{\tilde{z}}$ es acotada. De la dinámica perturbada del error (2.8), y del acotamiento de $\tilde{\theta}$, sigue que $\dot{\tilde{z}}$ es acotada si, y solamente si, $\tilde{z}_{2d}$ es acotada. A fin de probar que z_{2d} es acotada tomemos como función de Lyapunov para la dinámica del controlador, $V_2 = \frac{C}{2}(z_{2d} - V_d)^2$. La derivada temporal de V_2 a lo largo de las trayectorias de (2.1) resulta en:

$$\dot{V}_2 = -\frac{\hat{\theta}}{C}\left(z_{2d} - V_d\right)\left[z_{2d} - \frac{V_d^2}{z_{2d}}\left(1 + \frac{R_1}{E}\tilde{z}_1\right)\right] - L\frac{V_d^2}{E}\left(z_{2d} - V_d\right)\left(z_{2d} - z_2\right) \tag{2.12}$$

La dinámica de los ceros asociadas con el controlador dinámico retroalimentado propuesto está dada por:

$$\dot{z}_{2d} = -\frac{\hat{\theta}}{C}\left(z_{2d} - \frac{V_d^2}{z_{2d}}\right) \tag{2.13}$$

la cual tiene un punto de equilibrio asintótico en $z_{2d} = -V_d$ para todas las condiciones iniciales que satisfacen $z_{2d}(0) > 0$.
□ □ □

2.1 Simulación. Simulaciones del comportamiento en lazo cerrado del convertidor "boost" y el controlador adaptativo indirecto PWM en base a la pasividad fueron desarrolladas sobre el modelo perturbado (2.19) del circuito convertidor "boost". La magnitud del ruido fué seleccionada, aproximadamente, del 5% del valor de E.

Los valores de los parámetros del circuito fueron tomados de los siguientes valores "típicos":

$$C = 20\ \mu\text{F} \ \ ; \ \ R = 30\ \Omega \ \ ; \ \ L = 20\ \text{mH} \ \ ; \ \ E = 15\ \text{V}$$

$z_{1d} = 3.125$ Amp., con una razón de trabajo en estado estacionario de $U = 0.6$. Esto corresponde a un voltaje promedio de salida nominal, $z_2 = V_d = 37.5$ Volts.

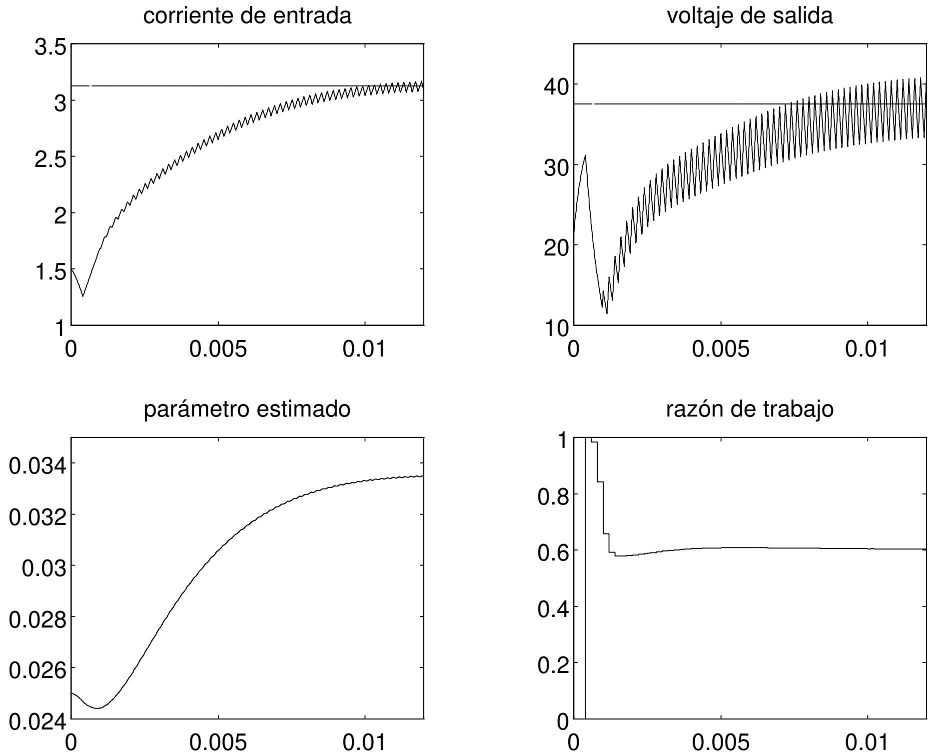

Figura 2.5: Resultados de la simulación para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Adaptativo Indirecto en el Convertidor "Boost".

La figura 2.5 muestra las trayectorias de estado en lazo cerrado correspondientes al sintetizador adaptativo de la razón de trabajo desarrollado para el convertidor "boost". Esta figura también presenta las trayectorias de la función de razón de trabajo y del valor del parámetro estimado, así como una realización generada por la computadora de la señal de perturbación estocástica η.

Como puede verse en las simulaciones, el controlador propuesto ejecuta la estabilización indirecta del voltaje de salida alrededor del valor de equilibrio deseado, mientras exhibe un alto grado de robustez con respecto a la señal de perturbación estocástica externa.

$\Box\ \Box\ \Box$

Convertidor "Buck–Boost".

La siguiente proposición resume las propiedades del controlador dinámico, adaptativo, no lineal, basado en la pasividad para el convertidor "buck–boost". La prueba sigue argumentos similares a aquellos ya utilizados en las proposiciones previas.

2.2 Proposición. *Considere la dinámica promedio (1.9)–(1.10) del convertidor* *"buck–boost", donde $C > 0$, $L > 0$, $E > 0$ son constantes* conocidas *que representan la capacitancia, inductancia y el voltaje externo respectivamente, y $R > 0$ es la resistencia de carga* desconocida *Se define un controlador* adaptativo *no lineal dinámico de estado retroalimentado como:*

$$\begin{aligned}\dot{z}_{2d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C}\Big\{z_{2d} + V_d\left(\frac{V_d}{E}+1\right) \\ &\quad \Big[\frac{E + LV_d\left(\frac{V_d}{E}+1\right)z_{2d}\left(z_2 - z_d\right) + R_1\left(z_1 - \frac{V_d}{R}(\frac{V_d}{E}+1)\right)}{E - z_{2d}(t)}\Big]\Big\} \\ \mu(t) &= \frac{z_{2d}(t) + LV_d\left(\frac{V_d}{E}+1\right)z_{2d}\left(z_2 - z_d\right) + R_1\left(z_1 - V_d(\frac{V_d}{E}+1)\hat{\theta}\right)}{z_{2d}(t) - E}\end{aligned} \quad (2.14)$$

donde la condición inicial del controlador dinámico es selecionada tal que, $z_{2d}(0) < 0$ y $\hat{\theta}(0) > 0$. El valor de referencia constante para z_2, denotado por $-V_d$, es una cantidad estrictamente negativa. La cantidad $\hat{\theta}$ denota la estimación de $\frac{1}{R}$. El parámetro R_1 es una constante seleccionada por el diseñador con la restricción de ser estrictamente positiva. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (1.9),(2.14) tiene un punto de equilibrio dado por:

$$(z_1, z_2, z_{2d}, \hat{\theta}) = \left(\frac{V_d}{R}\left(\frac{V_d}{E}+1\right), V_d, V_d, \frac{1}{R}\right) \quad (2.15)$$

el cual es asintóticamente estable.
□ □ □

2.2 Simulación. También se desarrollaron simulaciones a objeto de efectuar la evaluación del comportamiento en lazo cerrado de un convertidor "buck–boost" regulado en forma indirecta y adaptativa. Los valores de los parámetros del convertidor fueron seleccionados en forma idéntica a aquellos considerados previamente en la simulación del convertidor "boost". El modelo perturbado regulado por conmutación usado en las simulaciones fué tomado de (2.33).

La corriente promedio de entrada deseada en el inductor fué colocada al valor de equilibrio $z_{1d} = I_d = 1.875$ Amp., con una razón de trabajo en estado estacionario $U = 0.6$. Esto corresponde a un voltaje promedio de salida, $z_2 = V_d = -22.5$ Volts. Las trayectorias de los estados del convertidor "buck-boost", regulado mediante el control adaptativo previamente diseñado, la función de razón de trabajo , el valor del estimador , y la señal de perturbación estocástica η (aproximadamente 5% del valor de E) se exponen en la figura 2.6.

En las simulaciones se puede observar el funcionamiento adecuado del controlador al igual que su robustez con respecto a la señal de perturbación estocástica externa.
□ □ □

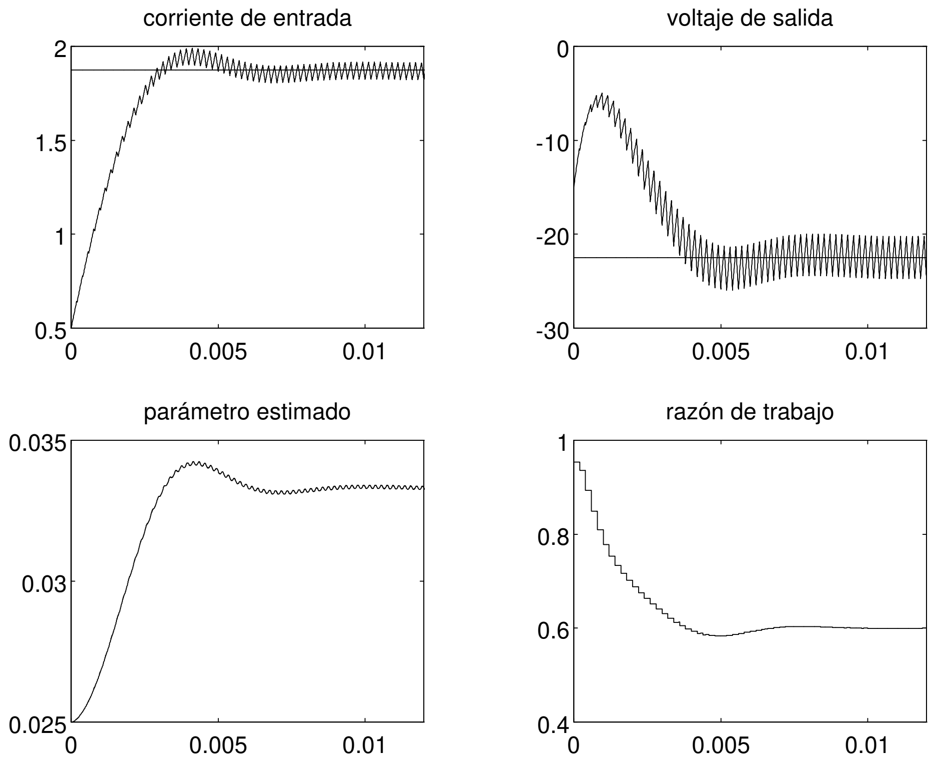

Figura 2.6: Resultados de la simulación para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Adaptativo Indirecto en el Convertidor "Buck–Boost".

Convertidor "Buck".

La siguiente proposición sintetiza el controlador adaptativo en base a la pasividad para el modelo promedio del convertidor "buck". La prueba del resultado se deja como ejercicio para el lector interesado.

2.3 Proposición. *Considere la dinámica promedio (1.8)–(1.9) del convertidor "buck", donde $C > 0$, $L > 0$, $E > 0$ son constantes* conocidas *que representan la capacitancia, inductancia y el voltaje externo, respectivamente, y la resistencia de carga $R > 0$, es* desconocida. *Se define un controlador* adaptativo *lineal dinámico de estado retroalimentado como:*

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C}\Big(z_{2d} - V_d\Big) \\ \mu(t) &= \frac{-LV_d z_{2d}\,(z_2 - z_{2d}) + z_{2d}(t) - R_1\left(z_1 - V_d\hat{\theta}\right)}{E} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -z_{2d}\,(z_2 - z_{2d}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde la condición inicial del controlador, $z_{2d}(0)$, satisface, $E > z_{2d}(0) > 0$, $\hat{\theta}(0) > 0$ y donde $V_d > 0$, es una valor constante de referencia para z_2. El parámetro, $R_1 > 0$, es una constante seleccionada por el diseñador. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (1.8),(2.16) tiene un punto de equilibrio:

$$(z_1, z_2, z_{2d}, \hat{\theta}) = \left(\frac{V_d}{R}, V_d, V_d, \frac{1}{R}\right) \tag{2.17}$$

el cual es asintóticamente estable.

□ □ □

2.3 Simulación. Las simulaciones fueron efectuadas para el esquema de regulación adaptativa operando sobre un convertidor "buck" perturbado (2.37), donde η presenta una magnitud aproximada del 5% de E.

La corriente promedio de entrada deseada fué colocada en $z_{1d} = 0.3$ Amp., lo cual corresponde a una razón de trabajo y un voltaje promedio de salida, en estado estacionario, de $U = 0.6$ y $z_{2d} = V_d = 9$ Volts, respectivamente. En la figura 2.7 se muestran los resultados obtenidos.

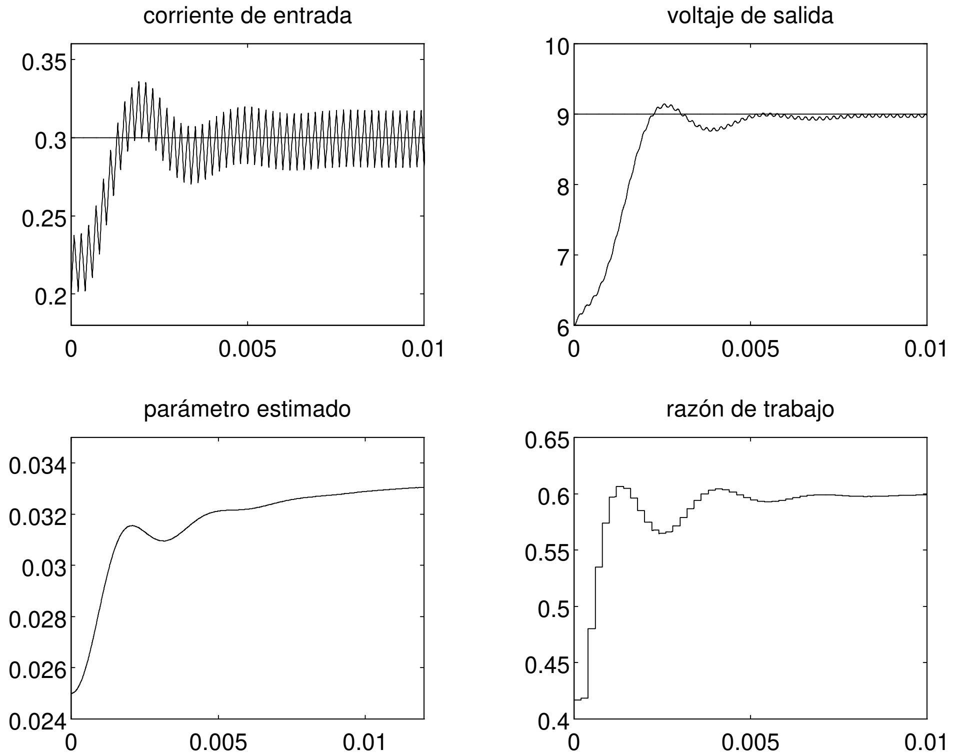

Figura 2.7: Resultados de la simulación para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Adaptativo Indirecto en el Convertidor "Buck".

□ □ □ .

En este capítulo hemos presentado un esquema de regulación en base a técnicas de pasividad desarrollado para la especificación en línea de la función de razón de trabajo en varias clases de convertidores de potencia DC–DC. Los controladores diseñados fueron desarrollados, en su versión adaptativa, bajo la suposición de que las cargas resistivas son de valor desconocido. Los resultados obtenidos pueden ser extendidos para aquellos casos donde otros parámetros importantes del circuito son también previsiblemente constantes pero desconocidos.

□ □ □

2.3 Circuito Convertidor Boost en Cascada

Considerese ahora una conexión en cascada de n convertidores de potencia DC–DC del tipo boost, como se muestra en la figura 2.8.

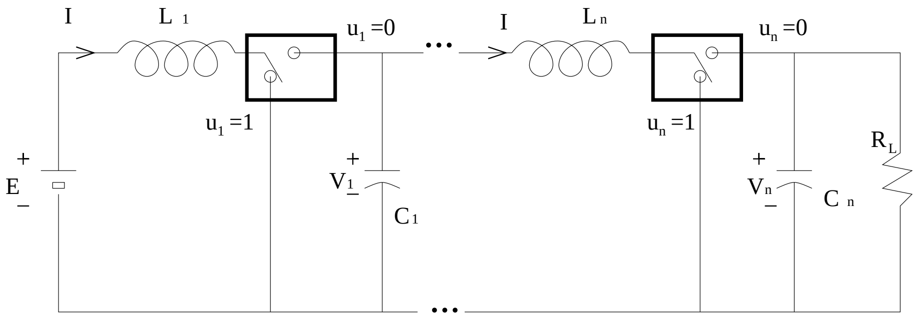

Figura 2.8: Convertidores "Boost" en Cascada.

El modelo de conmutación regulado multivariable del convertidor compuesto está dado por:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -(1-u_1)\frac{1}{L_1}\,x_2 + \frac{E}{L_1} \\
\dot{x}_2 &= (1-u_1)\frac{1}{C_1}\,x_1 - \frac{x_3}{C_1} \\
\dot{x}_3 &= -(1-u_2)\frac{1}{L_2}\,x_4 + \frac{x_2}{L_2} \\
\dot{x}_4 &= (1-u_2)\frac{1}{C_2}\,x_3 - \frac{x_5}{C_2} \\
&\cdots \\
\dot{x}_{2n-1} &= -(1-u_{n-1})\frac{1}{L_n}\,x_{2n} + \frac{x_{2n-2}}{L_n} \\
\dot{x}_{2n} &= (1-u_n)\frac{1}{C_n}\,x_{2n-1} - \frac{x_{2n}}{R_L\,C_n}
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

donde $x_\iota; \iota = 1, 3, \ldots, 2n-1$, representan las corrientes de los inductores, $x_\iota; \iota = 2, 4, \ldots, 2n$, son los voltajes en los capacitores. Las variables $u_\iota; \iota = 1, \ldots, n$, denota las funciones de la posición de los interruptores.

Por simplicidad, se asume una política de regulación retroalimentada multivariable PWM, para las funciones de la posición del interruptor $u_\iota; \iota = 1, \ldots, n$, caracterizada por muestreos sincronizados.

$$
\begin{aligned}
u_\iota(t) &= \begin{cases} 1 \text{ para} & t_k \le t < t_k + \mu_\iota(t_k)T \\ 0 \text{ para} & t_k + \mu_\iota(t_k)T \le t < t_k + T \end{cases} \\
& \iota = 1, 2, \ldots, n. \\
& t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

donde $\mu_\iota; \iota = 1, 2, \ldots$, son las funciones de la razón de trabajo. T es el intervalo común de muestreo y t_k representa los instantes de muestreo en los n convertidores. Las funciones de razón de trabajo $\mu(.)$ toma valores en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

El modelo promedio PWM del conjunto de convertidores en cascada está representado mediante:

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -(1-u_1)\frac{1}{L_1}\, z_2 + \frac{E}{L_1} \\
\dot{z}_2 &= (1-u_1)\frac{1}{C_1}\, z_1 - \frac{z_3}{C_1} \\
\dot{z}_3 &= -(1-u_2)\frac{1}{L_2}\, z_4 + \frac{z_2}{L_2} \\
\dot{z}_4 &= (1-u_2)\frac{1}{C_2}\, z_3 - \frac{z_5}{C_2} \\
&\cdots \\
\dot{z}_{2n-1} &= -(1-u_{n-1})\frac{1}{L_n}\, z_{2n} + \frac{z_{2n-2}}{L_n} \\
\dot{z}_{2n} &= (1-u_n)\frac{1}{C_n}\, z_{2n-1} - \frac{z_{2n}}{R_L\, C_n}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Sea v el vector denotado por :

$$
v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mu_1 \\ 1-\mu_2 \\ \vdots \\ 1-\mu_n \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

Ahora se puede reescribir el sistema promedio (2.3) en forma matricial como sigue :

$$
\mathcal{D}_{MB}\, \dot{z} + (\mathcal{J}_{MB}(v) + \mathcal{R}_{MB}) = \mathcal{E}_{MB} \tag{2.5}
$$

donde $z^T = [z_1, z_2, \ldots, z_{2n}] \in R^{2n}$ con $z_j; j = 2, 4, \ldots, 2n$, son los voltajes de los capacitores, mientras $\mu_\iota \in [0, 1]$ $\iota = 1, \ldots, n$, son las funciones de la razón de trabajo asociadas con la operación PWM, para la regulación de los interruptores, $u_\iota; \iota = 1, 2, \ldots, n$.

Las matrices en la ecuación (2.5) están dadas por :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{MB} &= diag\{L_1, C_1, L_2, C_2, \ldots, L_n, C_n\}; \mathcal{R}_{MB} = diag\{0, 0, \ldots, 0, 1/R_L\} \\
\mathcal{E}_{MB}^T &= [E, 0, \ldots, 0]
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{J}_{MB}(v) = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -v_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -v_n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Note que para todo $v_\iota; \iota = 1, 2, \dots, n$; la matriz $\mathcal{J}_{MB}(v)$ satisface la siguiente igualdad $\mathcal{J}_{MB}(v) + \mathcal{J}_{MB}^T(v) = 0$, y en forma similar la ecuación de balance de energía formulada en (2.7).

$$\underbrace{H(t) - H(0)}_{\text{energía almacenada}} + \underbrace{\frac{1}{RC^2}\int_0^t q_C^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{energía disipada}} = \underbrace{\int_0^t \dot{q}_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{energía suministrada}} \tag{2.7}$$

donde $H(t) = z^T \mathcal{D} z = \mathcal{T}_\mu + \mathcal{V}_\mu$ es la *energía total* del modelo promedio del circuito.

Los puntos de equilibrio del modelo promedio (2.3), para unas razones de trabajo constantes dadas $\mu_\iota = U_\iota \in (0,1); \iota = 1, 2, \dots, n$, se obtienen obedeciendo la siguiente secuencia :

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \frac{\bar{z}_3}{1-U_1}; \quad \bar{z}_3 = \frac{\bar{z}_5}{1-U_2} \dots \quad \bar{z}_{2n-1} = \frac{\bar{z}_{2n}}{R_L(1-U_n)} \\ \bar{z}_2 &= \frac{E}{1-U_1}; \quad \bar{z}_4 = \frac{\bar{z}_2}{1-U_2} \dots \quad \bar{z}_{2n} = \frac{\bar{z}_{2n-2}}{1-U_n} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Es claro que la salida de voltaje promedio $\bar{z}_{2n}$ aumenta significativamente el valor de la entrada de la fuente externa E.

Los valores en estado estable de las corrientes en los inductores y los voltajes promedio en los capacitores están, entonces relacionados mediante :

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \frac{\bar{z}_{2n}^2}{E\ R_L}; \quad \bar{z}_3 = \frac{\bar{z}_{2n}^2}{\bar{z}_2\ R_L}; \\ \bar{z}_5 &= \frac{\bar{z}_{2n}^2}{\bar{z}_4\ R_L}; \quad \dots \quad ; \quad \bar{z}_{2n-1} = \frac{\bar{z}_{2n}^2}{\bar{z}_{2n-2}\ R_L}; \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dado un valor deseado, V_d, para la salida de voltaje promedio $\bar{z}_{2n}$, podemos seguir el procedimiento descrito a continuación, y así obtener, en estado estable, un conjunto de corrientes deseadas en los inductores.

- Establecer una secuencia arbitraria de los voltajes promedio deseados en los capacitores, en estado estable,

$$E < \bar{z}_2 < \bar{z}_4 < \dots < \bar{z}_{2n-2} < \bar{z}_{2n} = V_d \tag{2.10}$$

- Del segundo renglón de las expresiones (2.8) se obtiene las correspondientes razones en estado estable, $U_1, \ldots, U_n$.
- Con $\bar{z}_1$ conocida de la primera igualdad de (2.9), y sustituyendo los valores de razón de trabajo determinados, $U_\iota; \iota = 1, \ldots, n$, en el primer renglón de las expresiones (2.8) a fin de determinar un conjunto de valores deseados, en estado estable, de las corrientes en los inductores, $\bar{z}_3, \bar{z}_5, \ldots, \bar{z}_{2n-1}$.

Diseño del Control Adaptativo.

La siguiente proposición resume las propiedades del controlador adaptativo, dinámico, no–lineal en base a pasividad, para el convertidor de potencia en cascada o multivarable "boost", el cual indirectamente regula el voltaje promedio de salida en el último capacitor a un valor deseado V_d, mediante la conducción de las corrientes promedio de entrada en los inductores hacia un conjunto de valores determinados por la selección arbitraria de los voltajes, en estado estable, de los capacitores (2.10).

2.4 Proposición. *Considere la dinámica promedio (2.3) del circuito convertidor "boost" en cascada, donde $C_\iota, L_\iota > 0, \iota = 1, 2, \ldots, n$ y $E > 0$ son constantes* conocidas *representando las capacitancias, inductancias y la fuente de voltaje externa, respectivamente. El parámetro constante $R_L > 0$, es la resistencia de carga* desconocida.

Se define un controlador retroalimentado, dinámico, no–lineal, adaptativo como:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= 1 - \frac{1}{z_{2d}}\left[E + R_1\left(z_1 - \hat{\theta}\frac{V_d^2}{E}\right) + L_1\frac{V_d^2}{E}z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\right] \\
\mu_2 &= 1 - \frac{1}{z_{4d}}\left[z_{2d} + R_3\left(z_3 - \hat{\theta}\frac{V_d^2}{\bar{z}_2}\right) + L_2\frac{V_d^2}{\bar{z}_2}z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\right] \\
&\cdots \\
\mu_n &= 1 - \frac{1}{z_{(2n)d}}\left[z_{(2n-2)d} + R_{2n-1}\left(z_{2n-1} - \hat{\theta}\frac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}}\right) + \right. \\
&+ \left. L_n\frac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}}z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\right] \\
\dot{z}_{2d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_1}\left\{1 - \frac{\bar{z}_2}{Ez_{2d}}\left[E + R_1\left(z_1 - \hat{\theta}\frac{V_d^2}{E}\right) + L_1\frac{V_d^2}{E}z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\right]\right\}\frac{V_d^2}{\bar{z}_2} \\
&+ \frac{1}{R_2C_2}\left(z_2 - z_{2d}\right) \\
\dot{z}_{4d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_2}\left\{1 - \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_2z_{4d}}\left[z_{2d} + R_3\left(z_3 - \hat{\theta}\frac{V_d^2}{\bar{z}_2}\right) + L_2\frac{V_d^2}{\bar{z}_2}z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\right]\right\}\frac{V_d^2}{\bar{z}_4} \\
&+ \frac{1}{R_4C_2}\left(z_4 - z_{4d}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_{(2n)d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_n}\Bigg\{z_{(2n)d} - \frac{1}{z_{(2n)d}}\Bigg[z_{(2n-2)d} + R_{2n-1}\left(z_{2n-1} - \hat{\theta}\frac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}}\right) \\
&+ L_n\frac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}}z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\Bigg]\frac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}}\Bigg\} \\
\dot{\hat{\theta}} &= -z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

donde las condiciones iniciales del controlador dinámico son seleccionadas tal que, $z_{(2\iota)d}(0) > 0; \iota = 1, 2, \ldots, n$ *y* $\hat{\theta}(0) > 0$. V_d*, es el valor de referencia constante para el voltaje de salida* $z_{(2n)}$*, con la condición de ser una cantidad estrictamente positiva. El conjunto de constantes,* $\bar{z}_2, \bar{z}_4, \ldots, \bar{z}_{2n-2}, \bar{z}_{2n}$*, satisfacen la restricción:*

$$
E < \bar{z}_2 < \bar{z}_4 < \ldots < \bar{z}_{2n-2} < \bar{z}_{2n} = V_d \tag{2.12}
$$

La variable escalar $\hat{\theta}$ *denota la estimación de* $\frac{1}{R_L}$*. Los parámetros* $R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}$*, son constantes seleccionadas por el diseñador con la única restricción de ser estrictamente positiva. Bajo estas condiciones, el sistema en lazo cerrado (2.3)-(2.11) tiene un punto de equilibrio dado por:*

$$
\begin{aligned}
&\left(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{2n-1}, z_n, z_{2d}, z_{4d}, \ldots, z_{(2n)d}, \hat{\theta}\right) = \\
&\left(\frac{V_d^2}{R_L E}, \bar{z}_2, \frac{V_d^2}{R_L\bar{z}_2}, \ldots, \frac{V_d^2}{R_L\bar{z}_{2n-2}}, V_d, \bar{z}_2, \bar{z}_4, \ldots, V_d, \frac{1}{R_L}\right)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

la cual es asintóticamente estable.

Prueba Se puede verificar, por sustitución directa, que (2.13) representa un punto de equilibrio para el sistema en lazo cerrado.

Definimos :

$$
z_{1d} = \hat{\theta}\tfrac{V_d^2}{E} \quad ; \quad z_{3d} = \hat{\theta}\tfrac{V_d^2}{\bar{z}_2} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad z_{(2n-1)d} = \hat{\theta}\tfrac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}} \tag{2.14}
$$

Note que $z_{jd}; j = 1, 3, \ldots, 2n-1$ y $z_j; j = 1, 3, \ldots, 2n-1$, coinciden en el punto de equilibrio. Sea, $z - zd$, el vector de error, denotado por, $\tilde{z}$. En términos de las señales de error, (2.5) se pueden reescribir como :

$$
\mathcal{D}_{MB}\dot{\tilde{z}} + \mathcal{J}_{MB}(v)\tilde{z} + \mathcal{R}_{MBd}\tilde{z} = \Psi \tag{2.15}
$$

donde,

$$
\Psi = \mathcal{E}_{MB} - \left\{\mathcal{D}_{MB}\dot{z}_d + \mathcal{J}_{MB}z_d + \mathcal{R}_{MB}z_d - \left|\begin{array}{c} R_1\tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2/R_2 \\ R_3\tilde{z}_3 \\ \ldots \\ R_{2n-1}\tilde{z}_{2n-1} \\ 0 \end{array}\right|\right\} \tag{2.16}
$$

y $\mathcal{R}_{MBd}$ es una matriz definida positiva dada por :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{MBd} &= \mathcal{R}_{MB} + diag\left\{R_1, \tfrac{1}{R_2}, R_3, \ldots, \tfrac{1}{R_{2n-2}}, R_{2n-1}, 0\right\} \quad ; \\ & \qquad R_\iota > 0 \quad ; \quad \iota = 1, 2, \ldots, 2n-1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

la cual nos permite llevar a cabo la inyección de amortiguamiento que fuerza la estabilización asintótica del sistema.

La expresión (2.16) se puede escribir en forma explícita como :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -L_1\dot{z}_{1d} - (1-\mu_1)\, z_{2d} + E + R_1\tilde{z}_1 \\ \Psi_2 &= -C_1\dot{z}_{2d} + (1-\mu_1)\, z_{1d} - z_{3d} + \frac{1}{R_2}\tilde{z}_2 \\ &\cdots \\ \Psi_{2n-1} &= -L_n\dot{z}_{(2n-1)d} - (1-\mu_n)\, z_{(2n)d} + z_{(2n-2)d} + R_{2n-1}\tilde{z}_{2n-1} \\ \Psi_{2n} &= -C_n\dot{z}_{(2n)d} + (1-\mu_n)\, z_{(2n-1)d} - \frac{1}{R_L}\tilde{z}_{(2n)d} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Utilizando (2.11) y (2.15) uno tiene $\Psi_\iota = 0; \iota = 1, 2, \ldots, 2n-1$; y $\Psi_{2n} = \tilde{\theta} z_{(2n)d}$, donde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \frac{1}{R_L}$.

Entonces, el error de estabilización resultante del sistema está dado por la siguiente dinámica perturbada :

$$\mathcal{D}_{MB}\dot{\tilde{z}}_d + \mathcal{J}_{MB}\tilde{z} + \mathcal{R}_{MB}\tilde{z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \tilde{\theta} z_{(2n)d} \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

Empleando la función de Lyapunov candidata, definida por la energía del error de estabilización del sistema más la "energía" asociada con el error de estimación del parámetro,

$$H_d(t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{z}^T \mathcal{D}_{MB}\tilde{z} + \tilde{\theta}^2\right] \tag{2.20}$$

uno obtiene que, a lo largo de las trayectorias de (2.19), la siguiente relación es satisfecha,

$$\dot{H}_d(t) = -\tilde{z}^T\mathcal{R}_{MBd}\tilde{z} + \tilde{\theta}\left[\dot{\tilde{\theta}} + z_{(2n)d}\left(z_{(2n)} - z_{(2n)d}\right)\right] \tag{2.21}$$

Usando la última ecuación en (2.11) y sabiendo que $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ uno obtiene :

$$\dot{H}_d(t) = -\tilde{z}^T\mathcal{R}_{MBd}\tilde{z} \leq -\alpha\|\tilde{z}^2\| \tag{2.22}$$

donde α puede tomar el valor $min\{R_1, \frac{1}{R_2}, \ldots, R_{2n-1}, \frac{1}{R_L}\}$. Uno concluye entonces que $\tilde{z}$ y $\tilde{\theta}$ son acotados y que $\tilde{z}$ es integrable cuadráticamente. Para mostrar que

$\tilde{z} \to 0$ asintóticamente, se debe verificar que si $\tilde{z}$ es uniformemente contínua. Para ésto, es suficiente mostrar que $\dot{\tilde{z}}$ es acotada. De la dinámica del error (2.19), y del acotamiento de $\tilde{\theta}$ y $\tilde{z}$, concluimos que $\dot{\tilde{z}}$ es acotada si y solo si, $\tilde{z}_{(2n)d}$, es acotada.

Puesto que $\tilde{z}_\iota; \iota = 1, 2, \ldots, n$ tienden asintóticamente a cero, la estabilidad de la dinámica para $z_{jd}; j = 2, 4, \ldots, 2n$, dado en (2.11), es, finalmente, determinada por la siguiente "dinámica de los ceros" :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{2d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_1}\left\{1 - \frac{\bar{z}_2}{z_{2d}}\right\}\frac{V_d^2}{\bar{z}_2} \\
\dot{z}_{4d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_2}\left\{1 - \frac{\bar{z}_4 z_{2d}}{z_{4d}\bar{z}_2}\right\}\frac{V_d^2}{\bar{z}_4} \\
&\cdots \\
\dot{z}_{(2n-2)d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_{n-1}}\left\{1 - \frac{\bar{z}_{2n-2} z_{(2n-4)d}}{z_{(2n-2)d}\bar{z}_{(2n-4)}}\right\}\frac{V_d^2}{\bar{z}_{2n-2}} \\
\dot{z}_{(2n)d} &= -\frac{\hat{\theta}}{C_n}\left\{z_{(2n)d} - \frac{V_d^2}{z_{(2n)-2}}\frac{z_{(2n-2)d}}{\bar{z}_{2n-2}}\right\}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

la cual tiene un punto de equilibrio, asintóticamente estable, sobre:

$$\left(z_{2d}, z_{4d}, \ldots, z_{(2n-2)d}, z_{(2n)d}\right) = \left(\bar{z}_2, \bar{z}_4, \ldots, \bar{z}_{(2n-2)d}, V_d\right) \tag{2.24}$$

para todas las condiciones iniciales que satisfacen $z_{(2j)d} > 0; j = 1, 2, \ldots, n$.

□ □ □

2.5 Simulación. Las simulaciones del comportamiento en lazo cerrado de circuito convertidor promedio "boost" de tres estados y el controlador indirecto retroalimentado adaptativo en base a la pasividad fueron desarrolladas sobre la siguiente versión perturbada del circuito convertidor "boost".

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -(1-\mu_1)\frac{1}{L_1}z_2 + \frac{E+\eta}{L_1} \\
\dot{z}_2 &= (1-\mu_1)\frac{1}{C_1}z_1 - \frac{z_3}{C_1} \\
\dot{z}_3 &= -(1-\mu_2)\frac{1}{L_2}z_4 + \frac{z_2}{L_2} \\
\dot{z}_4 &= (1-\mu_2)\frac{1}{C_2}z_3 - \frac{z_5}{C_2} \\
\dot{z}_5 &= -(1-\mu_3)\frac{1}{L_3}z_6 + \frac{z_4}{L_3} \\
\dot{z}_6 &= (1-\mu_3)\frac{1}{C_3}z_5 - \frac{z_6}{C_3 R_L}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde η representa una entrada de perturbación estocástica que afecta el comportamiento del sistema a través del valor de la fuente de voltaje externa. Note que esta entrada de perturbación es del tipo "acoplado", de igual forma, entra al sistema de ecuaciones a través de una entrada en el canal de vector de campo, dado por $\left[\frac{1}{L_1}, 0, 0, 0, 0\right]^T$ la cual *no* está dentro del rango del espacio del canal de entrada del control, dado por el vector de campo :

$$\left[\frac{1}{L_1}z_2, -\frac{1}{C_1}z_2, \frac{1}{L_2}z_4, -\frac{1}{C_2}z_3, \frac{1}{L_3}z_6, -\frac{1}{C_3}z_5\right]^T \tag{2.26}$$

La magnitud del ruido seleccionado fué escogida, aproximadamente en un 10% del valor de E. Los valores de los parámetros del circuito fueron tomados de los siguientes valores "típicos",

$$\begin{array}{ll}
C_1 = C_2 = C_3 = 20\mu F & ; \quad R_L = 30\Omega \\
L_1 = L_2 = L_3 = 20mH & ; \quad E = 15V.
\end{array} \tag{2.27}$$

Seleccionando la salida de voltaje promedio $\bar{z}_6 = V_d = 200$ Volts y escogiendo arbitrariamente $\bar{z}_4 = 100$; $\bar{z}_2 = 50$. Donde estos valores corresponden a las razones de trabajo en estado estable $U_1 = 0.7; U_2 = 0.5; U_3 = 0.5$. El valor nominal de $\bar{z}_1$, correspondiente a los valores de V_d, R_L y E, es $\bar{z}_1 = 88.88$ Amp . Los valores en estado estable de la razón de trabajo y el valor de $\bar{z}_1$, conlleva a las corrientes deseadas en estado estable $\bar{z}_3 = 26.66Amp.$ y $\bar{z}_5 = 13.33Amp.$

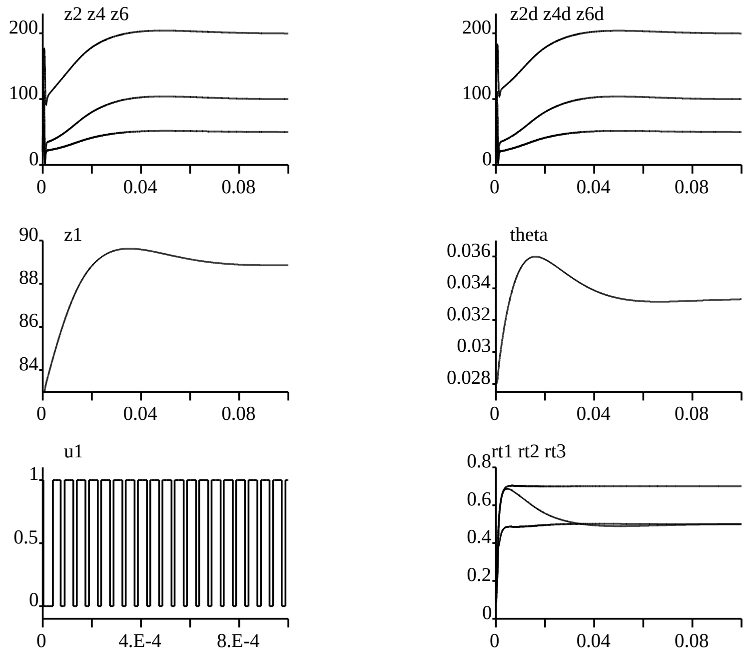

Figura 2.9: Resultados de la Simulación para la Evaluación del Comportamiento del Controlador Adaptativo Indirecto en el Convertidor Multivariable “Boost”.

La figura 2.9 muestra las trayectorias en lazo cerrado correspondiente al sintetizador de la razón de trabajo derivadas para los tres convertidores “boost” en cascada. Esta figura también presenta las trayectorias del valor del parámetro estimado y la señal de perturbación estocástica externa η generada por la computadora.

Las simulaciones muestran que el controlador propuesto ejecuta la estabilización del voltaje de salida alrededor del valor de equilibrio, mientras exhibe un alto grado de robustez con respecto a la entrada de perturbación de estocástica externa.
□ □ □

En resumen en esta sección se ha desarrollado un esquema de regulación basado en pasividad para una especificación en línea de la funci'on de razón de trabajo estabilizante en la versión multivariables de convertidores de potencia DC–DC del tipo “boost”. El método propuesto se basa en una combinación de moldeado de la energía en lazo cerrado y una apropiada inyección de amortiguamiento estabilizante a través de la realimentación dinámica del estado. La técnica propuesta, la cual emplea la energía total del sistema como una función de Lyapunov, es fácilmente ajustable ante incertidumbres paramétricas en la resistencia de carga.

□ □ □

Capítulo 3

Regulación Dinámica Adaptativa ControlandoLa Fase No-mínima en Convertidores DC-DC.

A lo largo de este capítulo se desarrolla un método para el control retroalimentado, inestable a tramos, para la estabilización de la respuesta de fase no-mínima, con parámetros inciertos, la cual se obtiene al regular directamente la variable del voltaje en el capacitor de salida, en los convertidores de potencia DC-DC, del tipo "boost" y "buck–boost" controlados vía PWM. El esquema propuesto constituye una versión adaptativa en la retroalimentación de la razón de trabajo, inestable, generada dinámicamente a partir de una linealización nominalmente exacta, en combinación con los necesarios y útiles reinicios sobre la trayectoria de salida del compensador. El desarrollo de los reinicios se realiza sobre un modo de ajuste "seudo-deslizante" entorno a una pequeña vecindad, del valor de equilibrio de la función de razón de trabajo dinámicamante sintetizada.

Los controladores retroalimentados no–lineales, en base a la linealización nominalmente exacta en los modelos promedios de los convertidores de potencia DC–DC en la literatura actual requiere un conocimiento perfecto de todos los parámetros (ver Sira–Ramírez et al [30] [31]). Este requirimiento es difícil de satisfacer debido a la impresición natural existente en los valores de los parámetros de los componentes del circuito convertidor. Los valores nominales de estos componentes pueden diferir significativamente de sus valores actuales, debido a los efectos de envejecimiento. Alternativamente, a estas características típicas de los parámetros del convertidor, estan la frecuencia de entrada al circuito, la constante de salida del circuito y el valor de la fuente de entrada de voltaje, las cuales pueden ser recopiladas gracias a las mediciones físicas efectivas, sin embargo en general, no se incluyen errores inescapables. Por otro lado estas limitaciones, son también evidentes en la regulación indirecta de la variable del voltaje de salida, a través de la trayectoria linealizada de entrada de corriente en el inductor, reflejandose en las características transitorias del voltaje de salida, las cuales son difíciles, o engorrosas, para evaluarse de antemano debido a las no-linealidades involucradas. En la práctica el controlador retroalimentado diseñado para los convertidores de potencia DC–DC, se hace necesario resover el problema así llamado al imponer características de estabilidad predeterminadas deseadas, a la regulación de la salida de fase no-mínima en la trayectoria del voltaje de salida en el capacitor en presencia de incertidumbres respecto a los parámetros del circuito.

En esta parte del trabajo se propone, un método factible de compensación retroalimentada discontínua para llevar a cabo la regulación, de respuesta de fase no-mínima, en la trayectoria de del voltaje de salida, con la característica de estar inmersos en la presencia de valores de parámetros constantes pero desconocidos. El método propuesto combina dos características útiles e importantes: Primero, una compensación linealizada en base a una retroalimentación dinámica linealizada de entrada–salida, la cual es inestable, y fuertemente acotada, por medio de reinicios del estado controlado, hacia una pequeña vecindad del control de entrada requerido para obtener el punto de equilibrio. Segundo, el esquema es adaptativo, por lo cual se asumen desconocidos los valores constantes de los parámetros del convertidor.

En la sección 3.1 explicaremos brevemente, dentro del contexto de sistemas no–lineales de segundo orden, un método de regulación dinámica, inestable a tramos, acotada, para la estabilización directa de las salidas de respuesta de fase no–mínima, en base a una técnica de linealización exacta. En esta seción también se presenta una versión adaptativa de estos compensadores dinámicos discontínuos. En la sección 3.2 se dedica el trabajo a la aplicación de los resultados anteriores a los convertidores de potencia DC–DC. Especificandose un esquema de regulación vía PWM adaptativa dinámica inestable a tramos para la estabilización directa de la respuesta de fase no–mínima en la salida de voltaje en el capacitor de los convertidores DC–DC.
□ □ □

3.1 Linealización de Sistemas Inciertos de Fase No–mínima vía una Compensación Dinámica, Inestable a tramos.

En esta sección se propone en primera instancia un método de regulación inestable a tramos para la estabilización de sistemas de respuesta de fase no–mínima con el *conocimiento perfecto* de los valores de los parámetros. Dado que el sistema de aplicaciones es de segundo orden las consideraciones se restringirán a sistemas de este orden, el método es generalizable, con pequeños esfuerzos para sistemas no–lineales observables de orden superior con una dinámica de los ceros inestable más complejo. Esto podría ubicarse en algunos otros esquemas de regulación puntuales para la estabilización asintótica de sistemas de fase no–mínima. La estabilización de la retroalimentación de fase no–mínima, por medio de una adecuada reespecificación de las variables de salida, ha sido recientemente propuesta por Benvenuti en [41] y también por Slotine y Hedrick [57]. En el caso lineal, el mismo método ha sido enteramente justificado, desde el punto de vista de la teoría de modulos, por Fliess y Sira–Ramírez [43]. Un método de control retroalimentado adaptativo para el problema de la ubicación de polos robusto en plantas lineales inciertas de fase no–mínima fué propuesta por Bartolini y Ferrara [58]. Esta metodología utiliza una combinación de control de estructura variable (discontínua) para el ajuste directo de los parámetros del controlador en combinación con una compensación paralela de la planta dada.

Diseño de Compensadores Inestables No–lineales.

Considerese el siguiente espacio de estados "SISO", una–entrada una–salida para un sistema no–lineal de dimensión dos.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,\theta) + g(x,\theta)u \quad ; \quad x \in \mathrm{R}^2 \quad ; \quad u, y \in \mathrm{R} \quad \theta \in \mathrm{R}^p \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde x es el estado de la planta, el cual se asume perfectamente medible, u es la entrada de control escalar, θ es un vector p–dimensional de parámetros constantes, asumiendo el conocimiento perfecto del valor de los parámetros constantes. y es la salida escalar del sistema regulado. Las funciones $f : \mathrm{R}^{p+1} \to \mathrm{R}^2$ y $g : \mathrm{R}^{p+1} \to \mathrm{R}^2$ son, fijas para θ en R^p, C^∞ vectores de campo globalmente definidos sobre R^2. La función $h : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ también se asume como una función escalar suave.

Se toman como válidas las siguientes suposiciones:

1. La salida y es *de grado relativo* igual a 1, es decir, la primera derivada temporal $\dot{y}$, de la función explícita de salida y, depende de la entrada de la función de control u para cualquier punto x en R^2 (ver Isidori [44]).

2. Para algún valor constante de la entrada de control $u = U$, existe una única constante nominal del vector de equilibrio de estados con componentes,

   $$x_1 = X_1(U,\theta) \; ; \; x_2 = X_2(U,\theta)$$

   (o simplemente $x = X(U,\theta)$).

   El valor de equilibrio correspondiente de la variable de salida y, está dado por $y = Y(U,\theta)$.

3. El vector de funciones no–lineales $f(x,\theta)$ y $g(x,\theta)$ son *afines* con respecto a las componentes del vector θ, es decir, son de la siguiente forma,

$$f(x,\theta) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{p} \theta_i f^i(x) \quad ; \quad g(x,\theta) = g_0(x) + \sum_{j=1}^{p} \theta_j g^j(x) \qquad (3.2)$$

4. La siguiente " matriz de observabilidad"

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} h(x) \\ \\ \frac{\partial}{\partial x}\, \dot{h}(x,\theta,u) \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

   es de rango completo igual a 2 para cualquier región abierta, acotada, del espacio de estados conteniendo el punto de equilibrio, $X(U,\theta)$, y para todos los valores constantes del vector de parámetros, θ in R^p.

La siguiente definición será de gran utilidad en la siguiente sección.

Definición 3.1.1 Dado el vector $\theta^{[2]}$ denotando el siguiente vector compuesto de todos los productos ordenados de las componentes de θ, tomandolos de dos en dos,

$$\theta^{[2]} = [\theta_1^2, \theta_1\theta_2, \ldots, \theta_2^2, \ldots, \theta_{p-1}\theta_p, \theta_p^2]^T \qquad (3.4)$$

El vector Θ es la composición ordenada en fila de θ y $\theta^{[2]}$.

$$\Theta = [\theta^T, (\theta^{[2]})^T]^T \qquad (3.5)$$

Las derivadas temporales de la función de salida y en (3.1) pueden entonces ser escritas como:

$$\begin{aligned} y &= b_0(x) = h(x) \\ \dot{y} &= b_1(x,\theta) + a(x,\theta)u \\ \ddot{y} &= b_2(x,\theta,u) + a(x,\theta)\dot{u} \end{aligned} \qquad (3.6)$$

□ □ □

Observación 3.1.2 Se ve claramente de las respectivas suposiciones y de la última definición que las funciones no–lineales $a(x,\theta)$ y $b_1(x,\theta)$ son funciones afines a las componentes del vector θ, mientras la función $b_2(x,\theta,u)$ es afín no únicamente a las componentes de θ si no también a las componentes $\theta^{[2]}$, es decir, $b_2(x,\theta,u)$ es afin a las componentes de Θ. Uno puede entonces reescribir las derivadas temporales de la salida y, como,

$$\begin{aligned}
y &= b_0(x) = h(x) \\
\dot{y} &= b_1(x,\theta) + a(x,\theta)u = b_{11}(x) + \theta^T W_{b1}(x) + \left[a_0(x) + \theta^T W_a(x)\right] u \\
\ddot{y} &= b_2(x,\theta,u) + a(x,\theta)\dot{u} = b_{21}(x,u) + \Theta^T W_{b2}(x,u) \\
&+ \left[a_0(x) + \theta^T W_a(x)\right] \dot{u}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

La suposición de observabilidad local, y el Teorema de la Función Implícita, implica la transformación dependiente de la entrada,

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x,\theta) + a(x,\theta)u \end{bmatrix}$$

en un difeomorfismo parametrizado en el espacio de estados, tal que permite localmente reemplazar el vector de componentes de estado en x por las funciones del conjunto de datos $\{y,\dot{y},\theta,u\}$. En otras palabras, el vector de estado x puede ser eliminado de (3.1) y una representación de entrada–salida no–lineal puede ser obtenida para el sistema dinámico dado, como: (ver Conte [59] y, también, Diop [60]),

$$\ddot{y} = c_1(y,\dot{y},\theta,u) + c_2(y,\dot{y},\theta,u)\dot{u} \tag{3.8}$$

La *dinámica de los ceros* asociada al sistema (3.8), se obtiene como la siguiente ecuación diferencial no–lineal para la señal de control u,

$$\dot{u} = -\frac{c_1(Y(U,\theta),0,\theta,u)}{c_2(Y(U,\theta),0,\theta,u)} \tag{3.9}$$

El carácter de fase no–mínima del sistema dado en (3.1), se debe al hecho que el punto de equilibrio constante $u = U$ de (3.9) es *inestable*.

El controlador inestable no-lineal, cuyo resultado del comportamiento en lazo cerrado es asintóticamente estable, respecto del sistema de segundo orden no–lineal (3.1), puede ser obtenido de la ecuación (3.8), usando una retroalimentación dinámica en base a una linealización exacta. En concreto, supongase que el comportamiento en lazo cerrado deseada la salida del sistema está dado, por la siguiente dinámica lineal asintóticamente estable,

$$\ddot{y} = -2\xi\omega_n\dot{y} - \omega_n^2(y - Y(U,\theta)) \tag{3.10}$$

Donde ξ es el *factor de amortiguamiento* deseado ($0 < \xi < 1$) y ω_n es la *frecuencia de oscilación natural* deseada (positiva), de la dinámica lineal de segundo orden. El punto de equilibrio deseado del sistema de lazo cerrado (3.10) es, evidentemente, $\dot{y} = 0$, $y = Y(U, \theta)$. Cuando el regulador retroalimentado dinámico, obtenido por la imposición de la dinámica de segundo orden deseada sobre la salida del sistema dado en (3.10), es representado por la siguiente ecuación diferencial de primer orden no–lineal, variante en el tiempo, para u,

$$\dot{u} = -\frac{2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 \,(y - Y(U, \theta)\,) + c_1(y, \dot{y}, \theta, u)}{c_2(y, \dot{y}, \theta, u)} \tag{3.11}$$

En términos del vector de estado original x, la expresión para el controlador dinámico (3.11) es obtenida de (3.6) y (3.10) como,

$$\dot{u} = -\frac{2\xi\omega_n \,[b_1(x, \theta) + a(x, \theta)u] + \omega_n^2(b_0(x) - Y(U, \theta)) + b_2(x, \theta, u)}{a(x, \theta)} \tag{3.12}$$

Evidentemente, cuando $y \to Y(U, \theta)$ y $\dot{y} \to 0$, y debido a la suposición de fase no–mínima, la entrada de control u, generada dinámicamente por el regulador (3.12), converge asintóticamente alcanzando la respuesta inestable de la dinámica de los ceros, caracterizada por (3.9).

Estrategia de Reinicios para la Compensación Dinámica.

Considerese la dinámica de los ceros asociada (3.9), y de la manera asintótica, formulada al comportamiento inestable del controlador linealizado (3.12). El diagrama de fase, $\dot{u}$ vs u alrededor del punto de equilibrio $u = U$; $\dot{u} = 0$ de un sistema inestable puede ser únicamente, una de las tres formas mostradas en la figura 3.1.

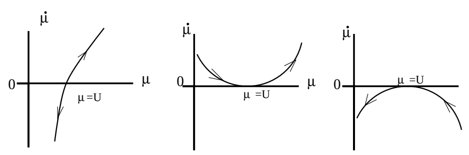

Figura 3.1: Diagrama de Fase local para una posible dinámica de los ceros de primer orden instable.

Aunque la estrategia de reinicios presentada en esta sección se aplica igualmente a las tres posibles clases de comportamiento inestable de primer orden de la dinámica de los ceros, se asume para abreviar que (3.9) exhibe un diagrama de fase de la forma mostrada en la figura 1(a).

Sean ϵ y δ dos pequeños números reales positivos, tal que $\delta < \epsilon$. Definamos dos conjuntos cerrados, o vecindades cerradas, alrededor del valor constante de equilibrio $u = U$ dentro del espacio en el control de entrada,

$$S_\delta = \{u \in \mathrm{R} \mid |u - U| \leq \delta\ \} \tag{3.13}$$

y

$$S_\epsilon = \{u \in \mathrm{R} \mid |u - U| \leq \epsilon\ \} \tag{3.14}$$

Evidentemente, $S_\delta \subset S_\epsilon$.

Respecto a la solución de la condición inicial, $u(t_0)$, del controlador u, (3.12), uno siempre puede escojer un valor inicial para la salida del controlador, u, tal que, se satisface $u(t_0) \in S_\delta$. Debido al comportamiento inestable del controlador, cualquier trayectoria de $u(t)$, gobernada por (3.12) y con condición inicial $u(t_0) \in S_\delta$ tal que $u(t_0) \neq U$,debería siempre satisfacer la condición $|u(t_1) - U| = \epsilon$, para cualquier tiempo finito $t_1 > t_0$. Note que durante el intervalo de tiempo, $[t_0, t_1]$, sea tan pequeño como se quiera, la salida del controlador $u(t)$ se dirige a ejercer un intento efectivo de retroalimentación estabilizante en el sistema controlado. La idea fundamental es, entonces, reiniciar el valor de u en algún punto dentro del conjunto "interior" S_δ, o en cualquiera de sus fronteras, inmediatamente despues que la trayectoria de la entrada del control alcanza alguna de las fronteras del conjunto "exterior" S_ϵ. El reinicio se lleva acabo, tal que la respuesta inestable de la salida del controlador u, se desenvuelve libremente dentro del conjunto S_ϵ hasta que una de las fronteras de S_ϵ es alcanzada posteriormente, ejerciendo un nuevo reinicio. La acción de control retroalimentada se constituye, por pequeños períodos de acciones efectivas (inestables) de control estabilizante retroalimentado, seguido de reinicios instantáneos del controlador u.

Los reinicios de u conllevan a discontinuidades en la derivada temporal del vector de estado controlado $\dot{x}$ en los instantes de la acción de los reinicios. Sin embargo, estas discontinuidades en $\dot{x}$ no influyen, evidentemente, en una evolución *contínua* para el estado regulado $x(t)$ (ver [61], [62]).

También, puede verse que una vez que la trayectoria del estado regulado converge asintóticamente, alcanzando el punto de equilibrio de estado $X(U, \theta)$; la ecuación diferencial, eventualmente describiendo el comportamiento en estado estable del controlador dinámico (3.12) está dada, precisamente, por aquella dinámica de los ceros (3.9). El comportamiento inestable asumido de la dinámica de los ceros (ver Fig 3.1 (a)) implica que sí, por ejemplo, la entrada de control u es reinicializada, en el mismo tiempo t_k, en el valor $u(t_k^+) = U + \delta$, entonces las trayectorias de la entrada del control puedan subsecuentemente crecer hacia el valor de $U + \epsilon$ y alcanzara este valor algún tiempo despues, sea éste t_{k+1}. Por lo que un reinicio de $u(t_{k+1}^+)$ será necesario. Si en este tiempo, la entrada de control en el instante t_{k+1}^+ es escogida como el valor $U - \delta$, entonces, de esta condición inicial, la trayectoria generada dinámicamente del control decrece hasta, la nueva condición inicial $U - \epsilon$. Si los reinicios son desarrollados en esta forma alternativa, se obtiene un comportamiento oscilatorio quasi–períodico para $u(t)$, alrededor del valor de equilibrio $u = U$ (note que bajo estas condiciones ideales de estado estable, es decir, siempre que $z_1 = Y(U, \theta)$, y

$z_2 = 0$, se obtiene una señal períodica verdadera $u(t) - U$ por el procedimiento de reinicio descrito). Este hecho es importante, ya que el *valor promedio* de la señal incremental $u(t) - U$ será llevada a cero y, además, $|u(t) - U|$, será uniformemente acotada por la pequeña constante positiva ϵ. En otras palabras, para una pequeña ϵ proporcionada, la generación de la señal de entrada del control dinámico $u(t)$, será igual al valor de equilibrio constante requerido $u = U$, en promedio. Estos hechos no solo motivan sino que justifican la siguiente estrategia de reinicios.

Sea $u(t^+)$ denotando el valor de $u(t)$ en un instante inmediatamente despues de t. Consideraremos, la siguiente estrategia de reinicio,

$$u(t) = \begin{cases} \text{si, para cualquier } t > t_0 \ ; \ |u(t) - U| = \epsilon, \\ \text{entonces, colocamos } \ u(t^+) = -\delta \operatorname{sign}\ [u(t)] \\ \text{en otro caso, si } |u(t) - U| < \epsilon, \ u(t) \ \text{ obedece a la formula } \ (3.12) \end{cases} \tag{3.15}$$

Notese, la gran semejanza con el comportamiento de "modo deslizante" (ver [63]), excepto que la "superficie deslizante" representada por $u = U$ y definida en el espacio de estado del controlador, no es una variedad fuertemente "atractiva", por lo que la estrategía (3.15), puede ser denominada como un "régimen pseudo–deslizante". La naturaleza discontínua y las características asociadas de robustez, comprobadas más adelante, de esta acción de control retroalimentado justifican ésta denominación.

Adaptación Retroalimentada en Sistemas de Fase No–mínima.

En esta sección se describirá un método para la obtención de una ley adaptativa del control retroalimentado linealizado, dinámico, inestable para la estabilización de sistemas no lineales de respuesta de fase no–mínima. En esencia los siguientes desarrollos adaptativos no difieren en gran medida a los utilizados para los sistemas de fase mínima, la única diferencia estriba al ligar la anterior definición de la estratégia de reinicio. En otras palabras se realizará la implementación de la estratégia de reinicio sobre la respuesta de una versión adaptativa del controlador linealizado. Los aspectos del procedimiento de adaptación dinámica está generalizada en Sira–Ramírez [64].

Considerese una vez más el sistema (3.1) donde ahora, los componentes del vector de parámetros θ se asumen constantes, pero sin embargo, completamente desconocidos.

Bajo las mismas suposiciones de la existencia de una observabilidad local del sistema dado, y mediante el uso de la representación de entrada–salida del sistema, sin grandes complicaciones conllevan a un controlador implementable de la forma (3.12), (3.15), con su debida necesidad de conocer el vector de parámetros θ.

Sea la dinámica deseada para la salida y del sistema de parámetros desconocidos, especificados como

$$\ddot{y} = -2\xi\omega_n\dot{y} - \omega_n^2(y - Y) \tag{3.16}$$

donde Y es el punto de operación constante deseable para la salida y.

Observación 3.1.3 Note que contrariamente al caso previo, la necesidad del conocimiento del vector de parametros θ puede impedir el cálculo real del valor de equilibrio $Y(U,\theta)$, correspondiente al valor constante de la señal de control, $u = U$. Se asume, que de la experimentación, o de alguna otra forma, el valor de la entrada de control fija y conocida $u = U$ conlleva, dentro de una vecindad de operación del valor de equilibrio $y = Y$ para la señal de salida. Evidentemente Y en general no coinciden con $Y(U,\theta)$ el cual se cálcula con el valor nominal supuesto de θ.

□ □ □

Considerese entonces, por el virtual *principio de equivalencia de certidumbre* el siguiente controlador retroalimentado dinámico, calculado, en base al *estimado* $\hat{\theta}$ del vector θ,

$$\dot{u} = -\frac{b_2(x,\hat{\theta},u) + 2\xi\omega_n\left[b_1(x,\hat{\theta}) + a(x,\hat{\theta})u\right] + \omega_n^2(h(x) - Y)}{a(x,\hat{\theta})} \tag{3.17}$$

Es necesario enfatizar que el controlador dinámico (3.17) se asume *inestable* para cualquier valor fijo del parámetro del vector estimado $\hat{\theta}$. La inestabilidad del controlador adaptativo será tratado exactamente en la misma forma propuesta en la sección anterior, es decir, por medio de *reinicios*.

El uso del controlador (3.17) sobre el sistema de parámetros desconocidos conlleva a la siguiente ecuación para una salida dinámica de segundo orden,

$$\begin{aligned}\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) &= [b_2(x,u,\theta) + a(x,\theta)\dot{u}] + 2\xi\omega_n[b_1(x,\theta) + a(x,\theta)u] \\ &\quad +\omega_n^2(b_0(x) - Y)\end{aligned} \tag{3.18}$$

Manipulaciones algebraicas directas conlleva a la siguiente expresión, para la anterior salida dinámica,

$$\begin{aligned}\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) &= b_2(x,u,\theta) - b_2(x,u,\hat{\theta}) + \left[a(x,\theta) - a(x,\hat{\theta})\right]\dot{u} \\ &+ 2\xi\omega_n\left\{b_1(x,\theta) - b_1(x,\hat{\theta})\right. \\ &+ \left.\left[a(x,\theta) - a(x,\hat{\theta})\right]u\right\}\end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\dot{u}$ está dada por (3.17). Usando las definiciones y hechos, establecidos en las secciones previas, y viendo la naturaleza afin de las funciones b_1, b_2 y a con respecto al vector Θ, uno obtiene para la salida dinámica real una expresión de la forma,

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) &= (\Theta - \widehat{\Theta})^T W(x, \widehat{\Theta}, u) \\ &= \widetilde{\Theta}^T W(x, \widehat{\Theta}, u) \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde $\widetilde{\Theta} = \Theta - \widehat{\Theta}$ se define como la *estimación del error sobreparametrizado* y el vector cuantificado $W(x, \widehat{\Theta}, u)$ se denomina *vector regresor*, dado por la siguiente composición de vectores,

$$W(x, \widehat{\Theta}, u) = \begin{bmatrix} W_{b2}^1(x, u) + 2\xi\omega_n W_{b1}(x) + 2\xi\omega_n W_a(x)u + W_a(x)\dot{u} \\ W_{b2}^2(x, u) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

con $\dot{u}$ definido por (3.17).

Para el cálculo de una ley de adaptación real, los desarrollos en Sastry e Isidori [52] o enSastry y Bodson [51], pueden ser claramente seguidos. Sin embargo resumiremos el desarrollo como sigue:

El valor estimado $\widehat{\Theta}$ de cada componente del vector Θ tiene, como es usual en el control adaptativo, un caracter individual, visto como si la diferencia de componentes fuerán totalmente independientes, uno de cada uno de los otros, en contra posición de su definición en (3.5). Este proceso,conocido como *sobreparametrización* constituye una técnica bien conocida en el control adaptativo (ver [51], y también, Campion y Bastin [65])

Sea $L(s)$ definido como:

$$L^{-1}(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{3.22}$$

de (3.20), la variable de salida de error de estabilización, $y - Y$, puede ser escrita como la respuesta de un sistema, para la entrada escalar representada por la señal $\widetilde{\Theta}^T W(x, \widehat{\Theta}, u)$,

$$y - Y = L^{-1}(s) * \left[\widetilde{\Theta}^T W(x, \widehat{\Theta}, u)\right] \tag{3.23}$$

donde "$*$" establece la operación de convolución en una notación hybrida, pero sin embargo popular.

Observese que la señal de entrada respectiva no es medible, debido al desconocimiento del error de sobreparametrización $\widetilde{\Theta}$, para lo cual uno necesita la siguiente versión del lema del "swapping" (ver [52]). Definase el error medible aumentado, e_1 como,

$$e_1 = y - Y + \widehat{\Theta}^T L^{-1}(s) * \left[W(x, \widehat{\Theta}, u)\right] - L^{-1}(s) * \left[\widehat{\Theta}^T W(x, \widehat{\Theta}, u)\right] \tag{3.24}$$

Es fácil ver, que e_1 converge en estado estable en el sistema de lazo cerrado al error de la salida en estado estable $y - Y$, el cual debería alcanzar el valor de cero. Manipulaciones directas de (3.24) y (3.23) implica que,

$$e_1 = \widetilde{\Theta}^T \left[L^{-1}(s) * W(x, \widehat{\Theta}, u)\right] = \widetilde{\Theta}^T \vartheta \tag{3.25}$$

Representando ϑ son las componentes del vector regresor filtrado. De esta forma e_1 constituye una ecuación de error lineal en $\tilde{\Theta}$, para la cual diversas leyes de actualización de parámetros pueden ser propuestas. Una de estas posibilidades está dada por la siguiente ley de actualización del tipo gradiente ([51])

$$\dot{\widetilde{\Theta}} = -\dot{\widehat{\Theta}} = \gamma e_1 W(x, \widehat{\Theta}, u) \tag{3.26}$$

donde γ es una constante positiva conocida como la *ganancia de adaptación*. Una segunda posibilidad está representada por ley de actualización del *gradiente normalizado* (ver [52], [51]),

$$-\dot{\widehat{\Theta}} = -\frac{e_1 \vartheta}{1 + \vartheta^T \vartheta} \tag{3.27}$$

Note que el error de estimación del parámetro sobreparametrizado $\widetilde{\Theta}$ converge a cero, mejorando las condiciones de *persistencia de excitación* dadas (ver [52], [51] (ch. 2), y Narendra y Annaswamy [66] (ch. 6)). En cuyo caso, la señal de error de salida $y - Y$ es asintóticamente estable a cero.

El control adaptativo inestable (3.17), (3.26) se combina con la siguiente estrategia de reinicios, donde, $0 < \delta < \epsilon$, son constantes reales pequeñas.

$$u(t) = \begin{cases} \text{si, para cualquier } t > t_0 \;\; ; \; |u(t) - U| = \epsilon, \\ \text{entonces, colocamos } \; u(t^+) = -\delta \text{ sign } [u(t)] \\ \text{en otro caso, si } |u(t) - U| < \epsilon, \; u(t) \text{ obedece a la formula (3.17) y (3.26)} \end{cases} \tag{3.28}$$

Note que los reinicios propuestos en (3.28), desarrollados sobre la salida u del regulador inestable (3.17), no causa discontinuidades en las trayectorias de estimación de los componentes del vector de parámetros, obtenidos como la solución de la ecuación diferencial (3.26).

□ □ □

3.2 Adaptación Dinámica, estabilizante, inestable a tramos en Convertidores DC–DC.

En esta sección se aplican los resultados de las secciones previas para la estabilización de la salida de respuesta de fase no–mínima en el voltaje del capacitor en los bien conocidos convertidores de potencia DC–DC, regulados vía PWM.

Circuito Convertidor "boost"

Considerese el circuito convertidor "boost" mostrado en la figura 3.2. Este circuito es descrito por el siguiente modelo de la ecuación de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-u)\, x_2/L + E/L \\ \dot{x}_2 &= (1-u)\, x_1/C - x_2/RC \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde x_1 y x_2 representan las variables de la corriente de entrada en el inductor y el voltaje de salida en el capacitor, respectivamente. La cantidad positiva E es una entrada de voltaje externo. La variable u denota la función del interruptor, actuando como la entrada de control tomando valores en el conjunto discreto {0,1}. La salida y del sistema está representada por la corriente de entrada en el inductor x_1.

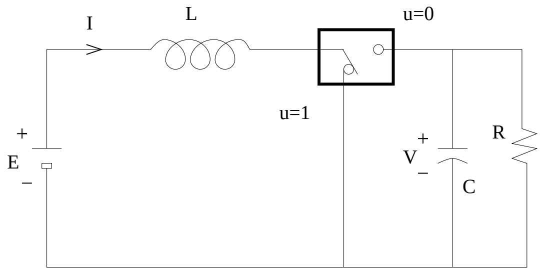

Figura 3.2: Circuito Convertidor "Boost".

Sea,

$$\theta_1 = 1/L \quad ; \quad \theta_2 = 1/C \quad ; \quad \theta_3 = 1/RC \quad ; \quad \theta_4 = E/L \tag{3.2}$$

La estrategia de control retroalimentado PWM para la regulación del circuito convertidor "boost", esta dada por la siguiente preinscripción de la función de posición del interruptor (ver [53]–[55]),

$$u = \begin{cases} 1 \text{ para} & t_k \leq t < t_k + \mu[x(t_k)]T \\ 0 \text{ para} & t_k + \mu[x(t_k)]T \leq t < t_k + T \end{cases}$$
$$k = 0, 1, \ldots \tag{3.3}$$

donde t_k representa un instante de muestreo, el parámetro T es el período de muestreo fijo, también llamado *ciclo de trabajo*, los valores muestreados del vector de estado $x(t)$ del convertidor se denotan por $x(t_k)$. La función, $\mu(\cdot)$, es la *función de razón de trabajo* actuando como una política de control. El valor de la función de la razón de trabajo, $\mu[x(t_k)]$, determina, en cada instante de muestreo, t_k, el ancho de permanencia en al valor lógico superior dado por $\mu[x(t_k)]T$. La función de razón de trabajo efectiva $\mu(\cdot)$, es evidentemente una función limitada en el intervalo [0,1] sobre la línea definida por el conjunto de los números reales.

El problema de control, asociado con la estabilización del sistema controlado discontínuamente (3.1),(3.3) hacia algún valor constante deseado (factible) preespecificado por el punto de equilibrio deseado, consiste en la especificación de la función de la razón de trabajo, μ, como una *política de control retroalimentada*, en función del vector de estado x. Como formulismo, el problema del cálculo de la función de la razón de trabajo es bastante complicado, resaltando la dificultad en ejecutar una discretización exacta del sistema vía PWM de los modelos (3.1),(3.3). Conceptualmente y en la práctica existe, una alternativa útil al retomar el *modelo PWM de frecuencia infinita*, también conocido como *Modelo Promedio del Espacio de Estados* del convertidor controlado vía PWM (3.1),(3.2) (ver Kassakian 1991 [12] y Middlebrook-Cúk [1981] [15]). La suposición de una frecuencia de muestreo infinita proporciona un modelo del sistema promedio no–lineal suavizado (3.1) donde la función de razón de trabajo, μ, se interpreta realmente como una entrada de control al sistema promedio en el reemplazo formal de la función de posición del interruptor. En concreto, la función de razón de trabajo se parece a la entrada del *Control Equivalente* en el correspondiente *Modo Deslizante* (ver Utkin[1978], [63]) y la interpretación de la idealización obtenida por (Sira-Ramírez (1989) [27]).

La idealización respectiva tiene la ventaja fundamental de reducir el problema del cálculo de la razón de trabajo a un problema estandar de diseño del control retroalimentado no–lineal en la cual la función de razón de trabajo actúa como la entrada de control retroalimentada requerida. La *función de razón de trabajo cálculada* por el diseño del control no–lineal retroalimentado, se utiliza directamente, en el esquema de control representado por la ecuación (3.1), limitandola en el intervalo $[0, 1]$, mejorandose el comportamiento con este acotamiento, "limitador", del valor de la función de trabajo (ver [30]–[37] para más detalles).

Considerese entonces el siguiente modelo promedio nominal PWM del circuito convertidor boost obtenido por (3.1)–(3.3), resultado de reemplazar la función de posición del interruptor u en (3.1), por la función suave representando la función de razón de trabajo μ,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -\theta_1(1-\mu)\,\zeta_2 + \theta_4 \\ \dot{\zeta}_2 &= \theta_2(1-\mu)\,\zeta_1 - \theta_3\zeta_2 \\ y &= \zeta_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde ζ_1 y ζ_2 representan las variables promedios de las variables de estado originales x_1 y x_2. Note el abuso de notación al denotar la variable de la salida promedio como y.

El punto de equilibrio de la dinámica del sistema promedio (3.4), correspondiente al valor constante U, $(0 < U < 1)$, de la razón de trabajo μ, está dada por,

$$\mu = U \quad ; \quad Z_1(U) = \frac{\theta_3\theta_4}{\theta_2\theta_1(1-U)^2} \quad ; \quad Z_2(U) = \frac{\theta_4}{\theta_1(1-U)} \tag{3.5}$$

Los valores de equilibrio $Z_1(U)$ and $Z_2(U)$ son, cantidades positivas.

La matriz de Observabilidad, (3.2), asociada a la salida, $y = \zeta_2$, del sistema promedio (3.3), está dada por,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_2(1-\mu) & -\theta_3 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

El rango de la matriz es igual a 2, excepto cuando μ es igual a 1. Esta condición corresponde físicamente a una *saturación* de la función de la razón de trabajo, ubicandose la posición del interruptor ($u \equiv 1$), no existiendo la posibilidad de una regulación retroalimentada.

Considerese la descripción, de entrada–salida del modelo promedio del circuito “boost” controlado vía PWM (ver [31]),

$$\ddot{y} = -\theta_1\theta_2(1-\mu)^2 y + \theta_2\theta_4(1-\mu) - \theta_3\dot{y} - \dot{\mu}\left[\frac{\dot{y} + \theta_3\, y}{(1-\mu)}\right] \tag{3.7}$$

La *dinámica de los ceros*, asociada a la constante del punto de equilibrio del sistema, $y = Z_2(U)$, $\dot{y} = 0$, está dada por,

$$\dot{\mu} = \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_3}(\mu - U)\;(1-\mu)^2 \tag{3.8}$$

Los puntos de equilibrio de la dinámica de los ceros estan claramente dados por $\mu = U$ y $\mu = 1$. Como lo indica el diagrama de fase (ver Figura 3.3), del sistema (3.8) revela, que ambos puntos de equilibrios son inestables.

Supongase que desea regular el voltaje de salida en el capacitor x_2 hacia un valor deseado constante $X_2(U) = Y$, notese el pequeño módulo del “rizo” debido a las acciones de la regulación mediante pulsos vía el controlador retroalimentado

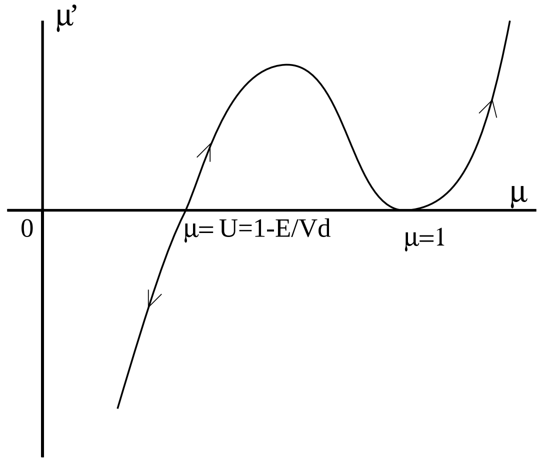

Figura 3.3: Dinámica de los ceros para el convertidor "Boost".

PWM. Se ha mostrada rigurosamente en [27], que las trayectorias del estado regulado vía PWM pueden converger, en un entorno arbitrario, hacia el promedio en lazo cerrado de la respuesta de los estados controlados vía PWM, mejorandose mediante el aumento a un valor más grande de la frecuencia de muestreo $1/T$, asociada al esquema de regulación de PWM utilizado. En resumen el problema de estabilización es, por lo tanto, primero resuelto sobre el modelo promedio en (3.3), como si éste fuese un modelo precisamente representado por el sistema real controlado vía PWM (3.1),(3.3).

Sea la dinámica lineal de lazo cerrado asintóticamente estable deseada para el convertidor controlado promedio PWM de la forma,

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) = 0 \tag{3.9}$$

El regulador retroalimentado inestable correspondiente el cual sintétiza el valor *cálculado* de la función de razón de trabajo μ, reescrita sobre las variables transformadas, está dado como,

$$\begin{aligned}\dot{\mu} \;&=\; \frac{\theta_2(1-\mu)}{\dot{y}+\theta_3 y}\Big[(2\xi\omega_n - \theta_3)\dot{y} + \omega_n^2(y-Y) \\ &\qquad -(1-\mu)^2\,\theta_1\theta_2\,y + \theta_2\theta_4\,(1-\mu)\Big]\end{aligned} \tag{3.10}$$

En términos de las variables originales de estado promediadas ζ_1, ζ_2, el sintetizador de la razón de trabajo, dinámica es reescrita como:

$$\begin{aligned}\dot{\mu} \;&=\; \frac{1}{\theta_2\zeta_1}\;\Big[\omega_n^2(\zeta_2 - Y) + 2\xi\omega_n\theta_2\zeta_1 - 2\xi\omega_n\theta_3\zeta_2 - \theta_1\theta_2\zeta_2 - \theta_2\theta_3\zeta_1 + \theta_2\theta_4 + \theta_3^2\zeta_2 \\ &\qquad +\mu\,(-2\xi\omega_n\theta_2\zeta_1 + 2\theta_1\theta_2\zeta_2 + \theta_2\theta_3\zeta_1 - \theta_2\theta 4) - \theta_1\theta_2\mu^2\zeta_2\Big]\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si los parámetros del circuito $\theta_1, \ldots, \theta_4$ son desconocidos, la versión adaptativa del controlador linealizado inestable (3.11) se obtiene como,

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \frac{1}{\hat{\theta}_2\zeta_1}\Big[\omega_n^2(\zeta_2 - Y) + 2\xi\omega_n\hat{\theta}_2\zeta_1 - 2\xi\omega_n\hat{\theta}_3\zeta_2 - \widehat{\theta_1\theta_2}\zeta_2 - \widehat{\theta_2\theta_3}\zeta_1 + \widehat{\theta_2\theta_4} + \widehat{\theta_3^2}\zeta_2 \\ &\quad +\mu\left(-2\xi\omega_n\hat{\theta}_2\zeta_1 + 2\widehat{\theta_1\theta_2}\zeta_2 + \widehat{\theta_2\theta_3}\zeta_1 - \widehat{\theta_2\theta_4}\right) - \widehat{\theta_1\theta_2}\mu^2\zeta_2\Big] \qquad (3.12)\end{aligned}$$

En términos del vector sobreparametrizado $\hat{\Theta}$, definido como,

$$\Theta = [\Theta_1, \ldots, \Theta_{14}] = [\theta_1, \ldots, \theta_4, \theta_1^2, \theta_1\theta_2, \ldots, \theta_2^2, \ldots, \ldots, \theta_3\theta_4, \theta_4^2]^T \qquad (3.13)$$

el controlador retroalimentado dinámico (3.12) se define como,,

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \frac{1}{\widehat{\Theta}_2\zeta_1}\Big[\omega_n^2(\zeta_2 - Y) + 2\xi\omega_n\widehat{\Theta}_2\zeta_1 - 2\xi\omega_n\widehat{\Theta}_3\zeta_2 - \widehat{\Theta}_6\zeta_2 - \widehat{\Theta}_{10}\zeta_1 + \widehat{\Theta}_{11} + \widehat{\Theta}_{12}\zeta_2 \\ &\quad +\mu\left(-2\xi\omega_n\widehat{\Theta}_2\zeta_1 + 2\widehat{\Theta}_6\zeta_2 + \widehat{\Theta}_{10}\zeta_1 - \widehat{\Theta}_{11}\right) - \widehat{\Theta}_6\mu^2\zeta_2\Big] \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Note que el controlador (3.13), o el equivalente (3.14), exhibe una singularidad en $\zeta_1 = 0$, la cual puede ser evitada considerandola alejada del punto de equilibrio. Las condiciones iniciales del sistema, y el controlador del estado, pueden ser siempre ubicadas apropiadamente lejos de estas singularidades evitandolas convenientemente.

Continuando los desarrollos de las secciones previas, se obtiene la siguiente expresión para el comportamiento de lazo cerrado, de la variable de salida.

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) = [\widetilde{\Theta}_1, \ldots, \widetilde{\Theta}_{14}]\begin{bmatrix} W_1(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \\ \vdots \\ W_{14}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu)\end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

Las ecuaciones de las leyes de actualización de la estimación de los parámetros se pueden resumir de la siguiente forma:

$$\dot{\widetilde{\Theta}}_i = -\dot{\widehat{\Theta}}_i = \gamma e_1 W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \quad ; \quad i = 1, \ldots, 14 \qquad (3.16)$$

donde,

$$\begin{aligned} W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= 0 \;\; ; \;\; i = 1, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14 \\ W_2(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= 2\xi\omega_n(1 - \mu)\zeta_1 - \zeta_1\dot{\mu} \\ W_3(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -2\xi\omega_n\zeta_2 \\ W_6(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -\zeta_2(1 - \mu)^2 \\ W_{10}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -\zeta_1(1 - \mu) \\ W_{11}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= 1 - \mu \\ W_{12}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= \zeta_2 \qquad (3.17)\end{aligned}$$

y,

$$e_1 = \sum_{i=1}^{14} \widetilde{\Theta}_i \vartheta_i = y - Y + \sum_{i=1}^{14} \widehat{\Theta}_i \vartheta_i - \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} * \left[\sum_{i=1}^{14} \widehat{\Theta}_i W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \right] \quad (3.18)$$

Las componentes del vector regresor filtrado ϑ_i se obtienen como las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales, con condiciones iniciales iguales a cero,

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_i &= -2\xi\omega_n \dot{\vartheta}_i - \omega_n^2 \vartheta_i + W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \\ & \quad i = 2, 3, 6, \ldots, 11, 12. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Evidentemente,

$$\vartheta_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 4, 5, \ldots, 9, 13, 14 \quad (3.20)$$

Una estrategia de reinicio puede ser propuesta para la sintésis de la razón de trabajo (3.14), (3.16) la cual ejecuta efectivamente la estabilización del sistema incierto al forzar la trayectoria de la salida del controlador generado dinámicamente $\mu(t)$; $t > t_0$, a desenvolverse dentro de una pequeña vecindad del valor de equilibrio del controlador requerido $\mu = U$.

$$\mu(t) = \begin{cases} \text{si, para cualquier } t > t_0 \ ; \ |\mu(t) - U| = \epsilon, \\ \text{entonces, colocamos } \ \mu(t^+) = -\delta \ \text{sign} \ [\mu(t)] \\ \text{en otro caso, si } |\mu(t) - U| < \epsilon, \ \ \mu(t) \ \text{ obedece a la formula } (3.14), (3.16) \end{cases} \quad (3.21)$$

La síntesis de la función de razón de trabajo adaptativa dinámica, (3.14), (3.16) hasta (3.21), es fácilmente transportada dentro del esquema de regulación vía PWM real de la forma (3.3), por medio de una frecuencia alta de muestreo en la síntesis de la trayectoria de la función de razón de trabajo calculada en línea $\mu(t)$.

La figura 3.4 delínea el esquema de regulación retroalimentada PWM adaptativa, inestable a tramos. Notese que en este esquema de retroalimentación, se prefiere usar las variables promedio del vector de estado ζ_1, ζ_2, como se indica en las expresiones (3.14), a los valores efectivos del vector de componentes, x_1, x_2. El esquema del control retroalimentado ha sido completamente justificado en [37]– [30], para un gran variedad de estrategias de controles retroalimentados no–lineales.

3.6 Simulación. Las simulaciones se desarrollan, para la estrategia de reinicio en el controlador retroalimentado dinámico adaptativo no–lineal propuesto y especificado por (3.14), (3.16) hasta (3.20), sobre el convertidor del tipo "boost". Los valores de parámetros utilizados en el modelo del convertidor, pero tan solo en el modelo, en cualquier otro caso son parámetros desconocidos, fueron seleccionados como: $L = 0.020$ H, $C = 20$ μF $R = 30$ Ω y $E = 15$V. El valor de equilibrio deseado para la función de razón de trabajo, generada por el controlador fué ubicado en $\mu = U = 0.6$. El correspondiente punto de equilibrio, para la corriente promedio de entrada en el inductor y el voltaje promedio en el capacitor, fueron ubicados, respectivamente, en $Z_1(0.6) = 3.125$Amp, $Y = Z_2(0.6) = 37.5$Volts.

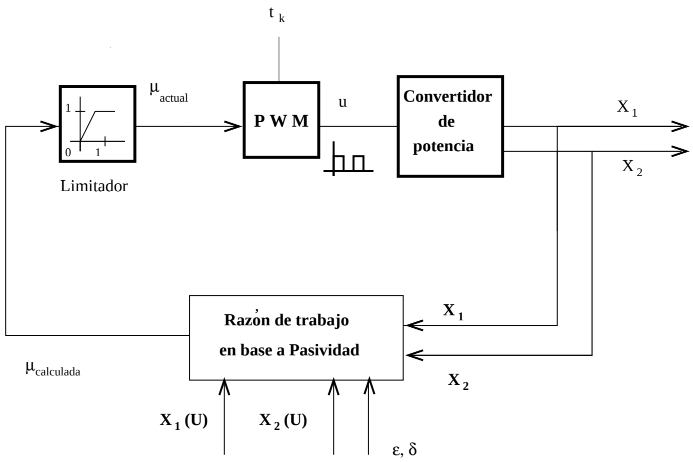

Figura 3.4: Esquema de Control retroalimentado PWM, adaptativo, dinámico, inestable para convertidores DC–DC.

Para la prueba de robustez del esquema de control adaptativo propuesto, se empleó el controlador dinámico diseñado sobre una versión del circuito convertidor "boost" perturbado. Una señal estocástica de promedio cero, acotada, generada por la computadora, η fué inyectada a l conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el modelo del circuito "boost" (3.1). La perturbación estocástica externa η fué ubicada en la fuente de voltaje, representando una fuente de voltaje externa incierta, dada de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\theta_1(1-u)x_2 + \theta_4(1+\eta) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2(1-u)\,x_1 - \theta_3\,x_2 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

El valor pico a pico de la perturbación estocástica externa, η, se seleccionó con un valor aproximado de 7.5% de la magnitud del parámetro E/L.

La simulaciones mostradas en la figura 3.5, delinean el comportamiento de las trayectorias de estado reguladas $x_1(t)$, $x_2(t)$ vía PWM no–lineal inestable a tramos, para el modelo del convertidor (3.22). La función de razón de trabajo generada dinámicamente μ fué utilizada sobre un controlador PWM de la forma (3.3), con una frecuencia de muestreo de 100 KHz.

La dinámica lineal asintóticamente estable deseada de segundo orden para la regulación en el voltaje salida del capacitor se caracteriza por los siguientes parámetros de diseño $\xi = 0.85$ $\omega_n = 700.0$.

La actividad de reinicio ejercida en la trayectoria de salida del controlador $\mu(t)$, para el sistema perturbado, se muestra también en la figura 3.5. Los conjuntos cercanos asociados a la estrategia S_ϵ and S_δ, definidos en (3.13)–(3.14), son caracterizados por $\epsilon = 0.003$ y $\delta = 0.001$. Una pequeña porción de la señal de entrada de perturbación estocástica externa, generada en la computadora, η se muestra en esta figura a la vez con algunas de las trayectorias de los componentes del vector de parámetros estimados, $\widehat{\Theta}(t)$. La ganancia de adaptación γ fué ubicada en el valor $\gamma = 0.859$.

Se pueden ver que las variables x_1 and x_2, convergen asintóticamente hacia los valores de equilibrio requeridos con la ausencia de oscilaciones. En deprimento de la natural entrada "acoplada" de perturbación aplicada al sistema, las variables de estado se exhiben robustas con respecto a esta perturbación estocástica externa. El objetivo del control de conducir el voltaje de salida en el capacitor del convertidor a un valor de equilibrio especificado con unas características de estabilización deseadas, como se ve fuerón perfeccionadas de manera satisfactoria.

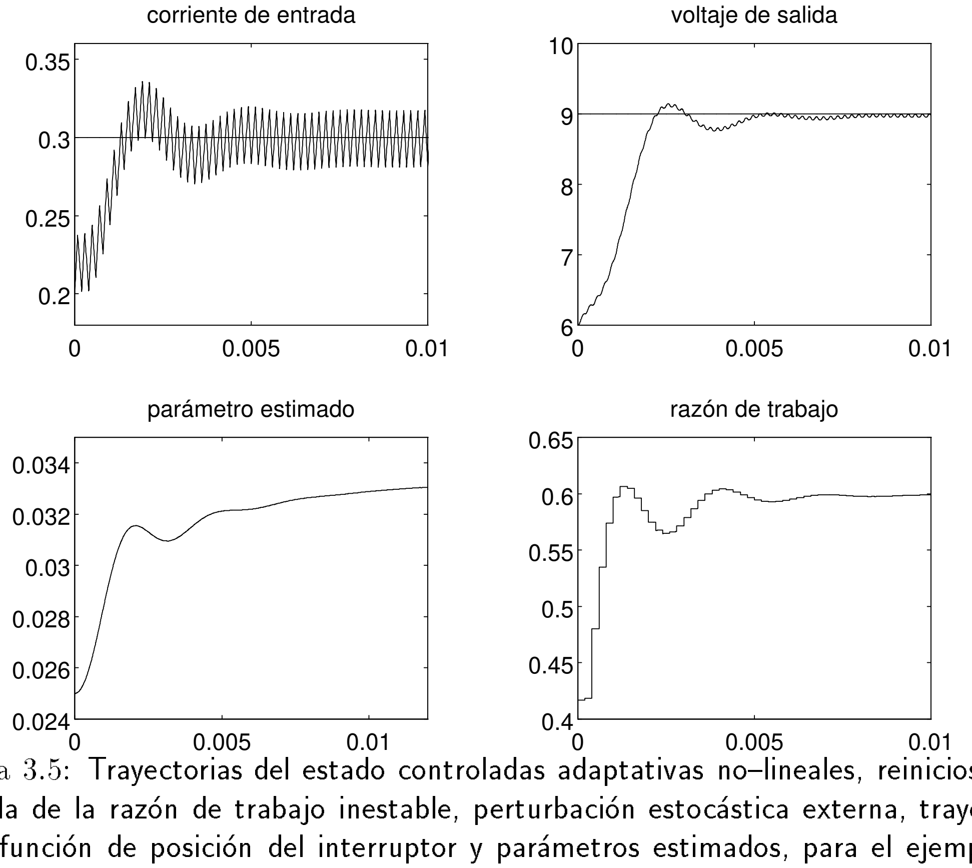

Figura 3.5: Trayectorias del estado controladas adaptativas no–lineales, reinicios de la entrada de la razón de trabajo inestable, perturbación estocástica externa, trayectoria de la función de posición del interruptor y parámetros estimados, para el ejemplo del convertidor "boost".

□ □ □

Convertidor "Buck–Boost".

En esta sección se resumiran los pasos más importantes para la obtención del sintetizador de la razón de trabajo adaptativa, no–lineal, inestable para la estabilización de la respuesta de fase no–mínima en la salida de voltaje en el capacitor del convertidor "buck–boost" de parámetros inciertos.

Modelo del convertidor "buck–boost" (Ver Figura 3.6).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1-u)\, x_2/L + u\, E/L \\ \dot{x}_2 &= -(1-u)\, x_1/C - x_2/RC \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

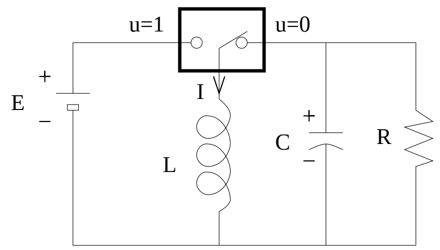

Figura 3.6: Convertidor "Buck–Boost".

Definición de parametros desconocidos.

$$\theta_1 = 1/L \quad ; \quad \theta_2 = 1/C \quad ; \quad \theta_3 = 1/RC \quad ; \quad \theta_4 = E/L \tag{3.24}$$

Modelo Promedio del Convertidor "buck–boost" vía PWM.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \theta_1(1-\mu)\, \zeta_2 + \mu\theta_4 \\ \dot{\zeta}_2 &= -\theta_2(1-\mu)\, \zeta_1 - \theta_3\zeta_2 \\ y &= \zeta_2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Puntos de Equilibrio para el modelo promedio.

$$\mu = U \quad ; \quad Z_1(U) = \frac{U\,\theta_3\theta_4}{\theta_2\theta_1(1-U)^2} \quad ; \quad Z_2(U) = -\frac{U\,\theta_4}{\theta_1(1-U)} \tag{3.26}$$

Matriz de Observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_2(1-\mu) & -\theta_3 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

El rango de la matriz de observabilidad es siempre igual a 2, excepto cuando μ es identica a 1.

Descripción de Entrada–Salida del controlador, vía PWM, del convertidor promedio "Buck–Boost" [31]

$$\ddot{y} = -\theta_1\theta_2(1-\mu)^2 y - \theta_2\theta_4\mu(1-\mu) - \theta_3\dot{y} - \dot{\mu}\left[\frac{\dot{y}+\theta_3\, y}{(1-\mu)}\right] \tag{3.28}$$

Dinámica de los Ceros para el convertidor promedio "buck–boost".

$$\dot{\mu} = \frac{\theta_1\theta_2}{U\theta_3}(\mu - U)\ (1-\mu)^2 \tag{3.29}$$

Los puntos de equilibrio de la dinámica de los ceros estan dados por $\mu = U$ y $\mu = 1$. Como revela el diagrama de fase del sistema (3.29) (ver Figura 3.7), ambos puntos de equilibrio son inestables.

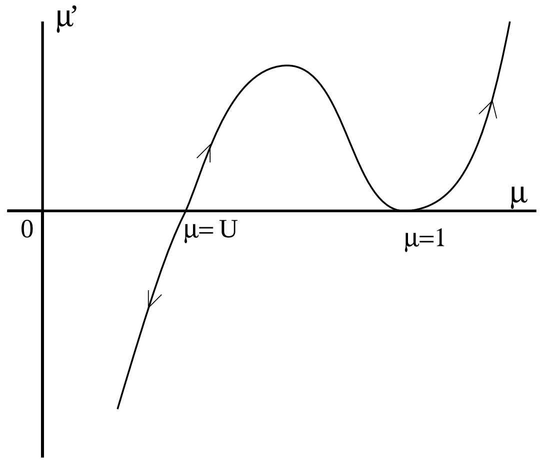

Figura 3.7: Dinámica de los ceros para el convertidor "Buck–Boost".

La Dinámica Lineal de Lazo Cerrado Asintóticamente Estable para el Control del Modelo Promedio del Convertidor "buck–boost".

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) = 0 \tag{3.30}$$

Sintetizador de Razón de Trabajo Retroalimentado Dinámico, No–lineal Inestable

$$\begin{aligned}\dot{\mu} \;=\; & \frac{1}{\theta_2\zeta_1}\Big[-\omega_n^2(\zeta_2 - Y) + 2\xi\omega_n\theta_2\zeta_1 + 2\xi\omega_n\theta_3\zeta_2 + \theta_1\theta_2\zeta_2 - \theta_2\theta_3\zeta_1 - \theta_3^2\zeta_2 \\ & +\mu\left(-2\xi\omega_n\theta_2\zeta_1 - 2\theta_1\theta_2\zeta_2 + \theta_2\theta_3\zeta_1 + \theta_2\theta_4\right) + \mu^2\left(\theta_1\theta_2\zeta_2 + \theta_2\theta_4\right)\Big]\end{aligned} \tag{3.31}$$

Sintetizador de Razón de Trabajo Adaptativo No–lineal Inestable

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \frac{1}{\hat{\theta}_2\zeta_1}\Big[-\omega_n^2(\zeta_2 - Y) + 2\xi\omega_n\hat{\theta}_2\zeta_1 + 2\xi\omega_n\hat{\theta}_3\zeta_2 + \widehat{\theta_1\theta_2}\zeta_2 - \widehat{\theta_2\theta_3}\zeta_1 - \widehat{\theta_3^2}\zeta_2 \\ &\quad +\mu\left(-2\xi\omega_n\hat{\theta}_2\zeta_1 - 2\widehat{\theta_1\theta_2}\zeta_2 + \widehat{\theta_2\theta_3}\zeta_1 + \widehat{\theta_2\theta_4}\right) + \mu^2\left(\widehat{\theta_1\theta_2}\zeta_2 + \widehat{\theta_2\theta_4}\right)\Big] \end{aligned} \tag{3.32}$$

Controlador Adaptativo Sobreparametrizado.

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \frac{1}{\widehat{\Theta}_2\zeta_1}\Big[-\omega_n^2(\zeta_2 - Y) + 2\xi\omega_n\zeta_1(1-\mu)\widehat{\Theta}_2 + 2\xi\omega_n\zeta_2\widehat{\Theta}_3 + \zeta_2(1-\mu)^2\widehat{\Theta}_6 \\ &\quad -\zeta_1(1-\mu)\widehat{\Theta}_{10} + \mu(1-\mu)\widehat{\Theta}_{11} - \zeta_2\widehat{\Theta}_{12}\Big] \end{aligned} \tag{3.33}$$

Comportamiento en Lazo Cerrado Inestable a tramos de la Salida del Voltaje Promedio en el Capacitor.

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2(y - Y) = [\widetilde{\Theta}_1, \ldots, \widetilde{\Theta}_{14}]\begin{bmatrix} W_1(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \\ \vdots \\ W_{14}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu)\end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Ley de Actualización para la estimación del Parámetro.

$$\dot{\widetilde{\Theta}}_i = -\dot{\widehat{\Theta}}_i = \gamma e_1 W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \quad ; \quad i = 1, \ldots, 14 \tag{3.35}$$

donde,

$$\begin{aligned} W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= 0 \;\; ; \;\; i = 1, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14 \\ W_2(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -2\xi\omega_n(1-\mu)\zeta_1 + \zeta_1\dot{\mu} \\ W_3(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -2\xi\omega_n\zeta_2 \\ W_6(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -\zeta_2(1-\mu)^2 \\ W_{10}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= \zeta_1(1-\mu) \\ W_{11}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= -\mu(1-\mu) \\ W_{12}(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) &= \zeta_2 \end{aligned} \tag{3.36}$$

y,

$$e_1 = \sum_{i=1}^{14}\widetilde{\Theta}_i\vartheta_i = y - Y + \sum_{i=1}^{14}\widehat{\Theta}_i\vartheta_i - \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} * \left[\sum_{i=1}^{14}\widehat{\Theta}_i W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu)\right] \tag{3.37}$$

Componentes del Vector Regresor (con Condiciones Iniciales Cero)

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta}_i &= -2\xi\omega_n\dot{\vartheta}_i - \omega_n^2\vartheta_i + W_i(\zeta, \widehat{\Theta}, \mu) \\ & \quad i = 2, 3, 6, \ldots, 11, 12. \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\vartheta_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 4, 5, \ldots, 9, 13, 14 \tag{3.39}$$

Sintetizador de la Razón de Trabajo Adaptativa Inestable, para una Estrategía de Reinicios.

$$\mu(t) = \begin{cases} \text{si, para cualquier } t > t_0 \ ; \ |\mu(t) - U| = \epsilon, \\ \text{entonces, colocamos } \ \mu(t^+) = -\delta \ \text{sign} \ [\mu(t)] \\ \text{en otro caso, si } |\mu(t) - U| < \epsilon, \ \ \mu(t) \ \text{ obedece a la formula } \ (3.33), (3.35) \end{cases} \tag{3.40}$$

La función de razón de trabajo adaptativa dinámica, (3.33),(3.35)–(3.40), se lleva a cabo dentro del esquema de regulación PWM de la forma (3.3), como el ejemplo previo.

3.7 Simulación. Las simulaciones fuerón desarrolladas para la estrategia del reinicios y controlador retroalimentado adaptativo dinámico no–lineal propuesto, especificado por (3.33), (3.35)–(3.40), sobre el convertidor del tipo "buck–boost". Los valores de parámetro utilizados únicamente en el modelo, para la simulación fueron seleccionados similares al del ejemplo del convertidor "boost". El valor de equilibrio para μ fué ubicado en $\mu = U = 0.556$. Los puntos de equilibrios correspondientes, para la entrada de la corriente promedio en el inductor y la salida de voltaje promedio en el capacitor se ubicaron respectivamente $Z_1(0.556) = 1.41$ Amp, $Z_2(0.556) = -18.79$ Volts.

La robustez del esquema de control retroalimentado adaptativo fué puesto a prueba con el sistema perturbado,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \theta_1(1-u)x_2 + \theta_4(1+\eta) \\ \dot{x}_2 &= -\theta_2(1-u)\ x_1 - \theta_3\ x_2 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

El valor pico a pico de la señal de perturbación "acoplada" η, fué seleccionado en 7.5% del valor del parámetro E/L.

La simulaciones, se muestran en la figura 3.8, delineando el comportamiento de las trayectorias de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$ reguladas inestable a tramos no–lineales vía PWM, para el modelo del convertidor perturbado (3.22). La frecuencia de muestreo para el controlador PWM (3.3) fué puesta en 100 KHz.

Para la dinámica de lazo cerrado linealizada deseada, se seleccionaron los siguientes parámetros de diseño:

$\xi = 0.85 \ \omega_n = 700.0$.

La actividad de reinicio en la salida de la trayectoria del controlador $\mu(t)$, para el sistema perturbado, se muestra también en la figura 3.8. Los conjuntos vecinos S_ϵ y S_δ, fueron caracterizados por $\epsilon = 0.004$ y $\delta = 0.002$. Además se muestra una pequeña porción de la señal de perturbación estocástica externa η, en esta figura se acompaña de las trayectorias de los componentes del vector de parámetros estimados $\widehat{\Theta}(t)$. La ganancia de adaptación γ fué seleccionada como $\gamma = 0.655$.

La variables de estado x_1 y x_2, convergen asintóticamente hacia los valores de equilibrio, sin oscilaciones observadas.

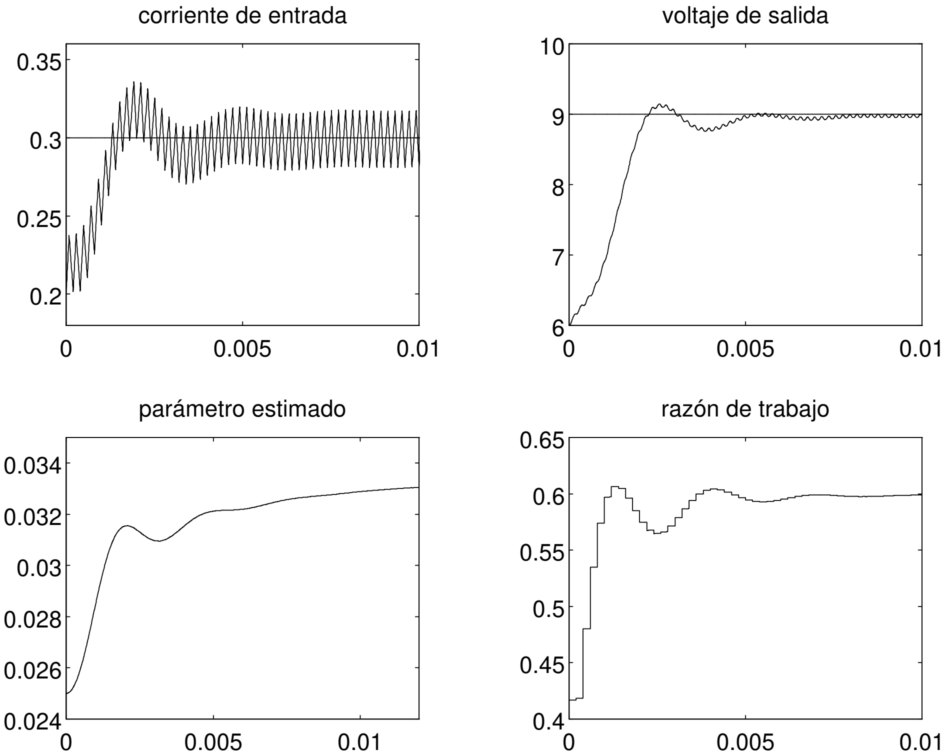

Figura 3.8: Trayectorias del estado controladas adaptativas no–lineales, reinicios de la entrada de la razón de trabajo inestable, perturbación estocástica externa, trayectoria de la función de posición del interruptor y parámetros estimados, para el ejemplo del convertidor "Buck–boost".

□ □ □

En resumen presentamos un nuevo esquema de control retroalimentado adaptativo inestable para la estabilización dinámica directa de la salida de fase no–mínima en sistemas no–lineales inciertos. El controlador de reinicios se mostró como un "regimenes pseudo–deslizantes" robustos, útilmente empleados sobre el espacio de estados del cotrolador. El esquema de control retroalimentado adaptativo conlleva a una trayectoria de la entrada del control linealizada, inestable a tramos, acotada para el sistema de lazo cerrado. Los resultados fueron aplicados a la regualción directa del voltaje de salida en el capacitor en fuentes de potencia DC–DC, tal como los convertidores del tipo "boost" y "buck–boost".

Aunque los resultados presentados corresponden a sistemas no–lineales de segundo orden, con dinámica de ceros inestable de primer orden, ellos pueden ser extendidos a sistemas de orden superior coincidiendo una dinámica de ceros de fase no–mínima asociada más compleja. La idea para estos casos consiste en un diseño directo del controlador linealizado, dinamicamente, inestable seguido, por reinicios de estado del cotrolador de dimención superior. Uno generaliza los resultados aqui presentados al definir utiles acotados "hipercajas" o "hiperparalopípedos", para los reinicios de las trayectorias del estado del cotrolador inestable alrededor del punto de equilibrio constante requerido. En promedio la salida del controlador dinámico es fuertemente colocado en el valor de el equilibrio requerido mientras sus derivadas temporales sucesivas son ubicadas individualmente sobre una pequeña vecindad del cero. Limitadas por "esferas y elipsoides" para las tareas de reinicio.

□ □ □

Capítulo 4

Adaptación Dinámica vía PWM en convertidores de potencia DC–DC, Método Backstepping

Se realiza una metodología de control retroalimentado adaptativo utilizando las consideraciones de entrada–salida y un método para el diseño de controles "un paso atras" (backstepping) de sistemas de fase ganeralizada en el modelo promedio del convertidor controlado vía modulación de anchura de pulso en alta frecuencia.

Una transformación de coordenadas de estado, del parámetro nominal, de entrada dependiente, del convertidor promediado via PWM conlleva a un tipo de retroalimentación del parámetro puro de forma canónica, asociada con la *Forma Canónica de Observabilidad Generalizada de Fliess*, de los modelos promedios del convertidor. Entonces un procedimiento de diseño "un paso atras" (backstepping) puede ser inmediatamente visualizado, el cual conlleva a un esquema de regulación adaptativa dinámica para la generación de una función de razón de trabajo estabilizante.

En esta parte, se presenta una estrategía muy diferente de retroalimentación adaptativa que se adoptó al recurrir a un método inspirado por la reciente introducción de la metodología del diseño del control, vía *un paso atras dinámico.* La adaptación a la técnica "un paso atras" fué desarrollada para la regulación de una gran mayoría de sistemas no–lineales de estados linealizados exhibiendo valores de parámetros constantes, pero no desconocidos.

La idea básica y variaciones útiles razonables del procedimiento diseño "un paso atrás" adaptativo pueden ser encontrados en excelentes artículos de investigación publicados por Kanellakopoulos (1991, 1991b y 1991c) [53] [27] [28] y por Krstic [49] en 1992 donde existen los detalles perfectamente delineados.

Se asume que los componentes del circuito convertidor son conocidos nominalmente y sus discrepancias de los valores nominales son totalmente desconocidos. El uso de una entrada dependiente, en base al parámetro nominal, y el difeomorfismo de coordenadas de la linealización entrada–salida del estado para el sistema desconocido produce un sistema transformado de imperfecciones en *variables de fase generalizadas* (Fliess [43]).

La estructura del sistema resultante, en variables de fase generalizada, se asemeja fuertemente a la *Forma Canónica de Retroalimentación del Parámetro Puro*, presentada en Kanellakopoulos 1991 [45] excepto por la presencia de la entrada de control en algunos componentes del "vector regresor" así como derivadas temporales de la entrada del control en el sistema de ecuaciones transformado.

El cálculo de los controles retroalimentados, y las leyes de actualización de los parámetros incrementales asociados; nos llevan a recurrir al procedimiento "un paso atras" aplicado a la obtención de una *Forma Canónica Generalizada del Párametro Incremental retroalimentado.* El resultado anterior conlleva posteriormente a preferir los *sintetizadores de la razón de trabajo* adaptativos dinámicos, a los tradicionales compensadores retroalimentados estáticos. La ventaja de generar dinámicamente, las señales de control de la razón de trabajo, se sustentan en la característica del aumento de suavidad de esta señal de regulación retroalimentada durante la operación de los convertidores. El suavizamiento de la función de la razón de trabajo incrementa la precisión, y la calidad de las características desarrolladas, del comportamiento en lazo cerrado de los circuitos convertidores de potencia DC–DC.

En el siguiente trabajo desarrollamos en primera instancia vía el ejemplo del convertidor "Boost", en forma desglozada los fundamentos de la linealización entrada–salida del convertidor controlado vía PWM, por medio del sintetizador de la razón de trabajo dinámico. Se asume que todos los parámetros en el sistema son conocidos perfectamente. El esquema de linealización entrada–salida ejecuta la regulación indirecta de la salida de voltaje promedio en el capacitor medio de la regulación de la entrada de la corriente promedio en el inductor. Esta estrategía, la cual envuelve esencialmente un "cambio de la salida" nos evita efectivamente el problema de fase no-mínima en la regulación directa de la variable de salida de voltaje promedio en el capacitor. Posteriormente se aplica la estrategía de control adaptativa dinámica vía PWM a los convertidores de potencia DC–DC del tipo "Boost" y "Buck-Boost" con los valores de los parámetros incrementales desconocidos.
□ □ □

4.1 Estrategía de linealización entrada-salida para convertidores de potencia DC–DC

En esta parte ubícamos los desarrollos que conllevan a los sintetizadores dinámicos de la razón de trabajo para la estabilización de los modelos nominales promedios de los convertidores de potencia DC–DC. El esquema explorado por Sira-Ramírez (1991) [28], se presenta en la figura 4.1, la idea fundamental es obtener una generalidad en la representación de la variable de fase no-lineal del comportamiento de entrada-salida del circuito promedio para el cual el problema de la síntesis del control es directa.

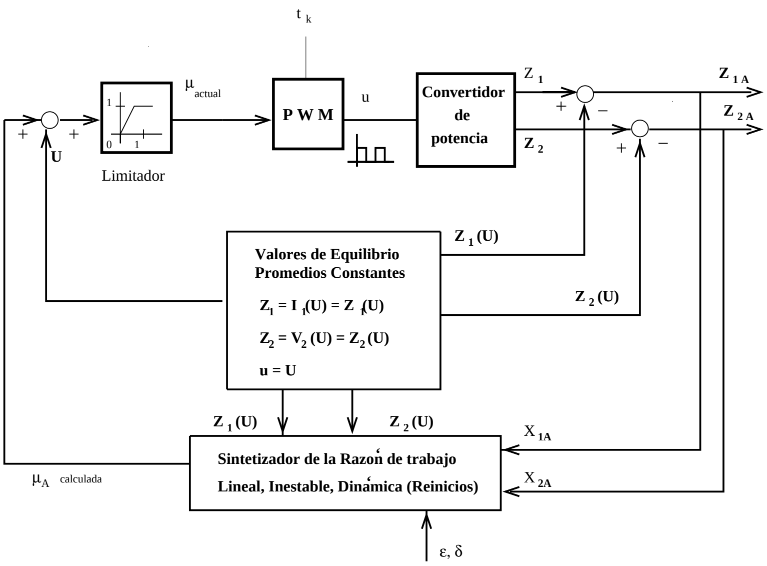

Figura 4.1: Esquema de Linealización entrada–salida.

Debido a los problemas de fase no-mínima asociadas con la variable de salida del voltaje en el capacitor, la variable ha regular se selecciona como la corriente de entrada en el inductor. Así se ejecuta la regulación en forma indirecta del voltaje de salida.
□ □ □

4.2 Circuito Boost

Considerese el circuito convertidor "boost" mostrado en la figura 4.2. Este circuito es descrito por el siguiente modelo de la ecuación de estado,

$$
\begin{aligned}
\dot{I}(t) &= -\frac{1}{L}(1-u)\,V(t) + \frac{E}{L} \\
\dot{V}(t) &= \frac{1}{C}(1-u)\,I(t) - \frac{1}{RC}V(t) \\
y(t) &= I(t) \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

donde I y V representan las variables de la entrada de corriente en el inductor y el voltaje de salida en el capacitor, respectivamente. La cantidad positiva E es una entrada de voltaje externo. La variable u denota la función del interruptor, actuando

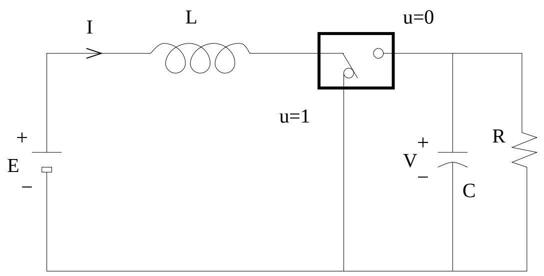

Figura 4.2: Circuito Convertidor "Boost".

como la entrada de control tomando valores en el conjunto discreto {0,1}. La salida y del sistema está representada por la corriente de entrada en el inductor I.

Sea,

$$\Theta_1 = \frac{1}{L} \quad ; \quad \Theta_2 = \frac{1}{C} \quad ; \quad \Theta_3 = \frac{1}{RC} \quad ; \quad \Theta_4 = \frac{E}{L} \tag{4.2}$$

el conjunto de parámentros nominales conocidos.

La estrategia de control retroalimentado PWM esta dada por la siguiente preinscripción de la función de posición del interruptor

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} 1 \text{ for} & t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 \text{ for} & t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \\ & t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde t_k representa un instante de muestreo; el parámetro T es el período de muestreo fijo, tambièn llamado *ciclo de trabajo*; los valores muestreados del vector de estado $x(t)$ del convertidor se denotan por $x(t_k)$. La función, $\mu(\cdot)$, es la *función de razón de trabajo* actuando como una política de control. El valor de la función de la razón de trabajo, $\mu[t_k]$, determina, en cada instante de muestreo, t_k, el ancho de permanencia en al valor lógico superior dado por $\mu[t_k]T$. La función de razón de trabajo efectiva $\mu(\cdot)$, es evidentemente una función limitada en el intervalo [0,1] sobre la lìnea definida por el conjunto de los números reales.

El problema de control, asociado con la estabilización del sistema (4.1) controlado discontìnuamente (4.3) hacia alguna constante deseada (factible) preespecificada dada por el punto de equilibrio deseado, consiste de la especificación de la función de la razón de trabajo, μ, como una *política de control retroalimentada estática o dinámica* como una funciòn del vector de estado x o como la solución de la ecuación diferencial variante en el tiempo sobre la base de los valores medidos del valor del estado. Como formulismo, el problema de la síntesis de la función de razón de trabajo es bastante complicado, resaltando la dificultad en ejecutar una discretización exacta del sistema vía PWM de los modelos (4.1) (4.3). Conceptualmente y en la práctica existe, una alternativa útil al retomar el *modelo PWM de frecuencia infinita*, también conocido como *Modelo Promedio del Espacio de Estados* del convertidor controlado vía PWM (ver Kassakian 1991 [12] y Middlebrook-Cúk [1981] [15]). La suposición de una frecuencia de muestreo infinita proporciona un modelo del sistema promedio no–lineal suavizado donde la función de razón de trabajo, μ, realmente se interpreta como una entrada de control al sistema promedio en un remplazo formal de la función de posición del interruptor. En concreto, la función de razón de razón de trabajo se parece a la entrada del *Control Equivalente* en el correspondiente *Modo Deslizante* (ver Utkin[1978]) y la interpretación de la idealización obtenida (Sira-Ramírez (1989) [27]).

La respectiva idealización tiene la ventaja fundamental de reducir el problema del cálculo de la razón de trabajo a un problema estandar de diseño del control retroalimentado no–lineal en la cual la función de razón de trabajo actúa como la entrada de control retroalimentada requerida. Algunos de los bien conocidos procedimientos de diseño de controladores retroalimentados estáticos o dinámicos establecidos en literatura reciente (ver Isidori (1989) [52], Rugh [50] y Fliess [42]) pueden ser aplicadas a los modelos promedios no–lineales del circuito para obtener la función de razón de trabajo requerida como una ley de control retroalimentada no–lineal.

Considerese entonces el siguiente modelo promedio nominal PWM del circuito convertidor boost,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -\Theta_1(1-\mu)\,\zeta_2 + \Theta_4 \\ \dot{\zeta}_2 &= \Theta_2(1-\mu)\,\zeta_1 - \Theta_3\zeta_2 \\ \eta &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde ζ_1 y ζ_2 representan las variables promedios de las variables de estado originales I y V. La variables η denota la variables de salida promedio ζ_1.

Para un valor constante dado, $\mu = u$, en la función de razón de trabajo, los correspondientes valores de equilibrio de las variables de estado del circuito estan dados por,

$$\zeta_1(U) = \frac{\Theta_3\Theta_4}{\Theta_1\Theta_2(1-U)^2} \quad ; \quad \zeta_2(U) = \frac{\Theta_4}{\Theta_1(1-U)} \tag{4.5}$$

Note la eliminación del parámetro constante U, en el conjunto formado por la relación de los valores de equilibrio ζ_1 y ζ_2

$$\zeta_1(U) = \frac{\theta_3\theta_4}{\theta_2\theta_1}\zeta_2^2(U)$$

De esta forma el valor deseado en estado estable predefinido del voltaje de salida en el capacitor $\zeta_2(U)$, determina un único valor, en ambos valores requeridos constantes de la función de razón de trabajo, U y su correspondiente valor promedio para la entrada de corriente en el inductor $\zeta_1(U)$.

Este simple hecho permite la *regulación indirecta* del voltaje promedio en el capacitor del convertidor a través de la regulación de la corriente promedio de entrada en el inductor. Por esta razón el problema de control puede ser formulado en términos de ejecutar un valor de equilibrio en estado estable, denotado por Y, para la entrada de corriente en el inductor.

Considerese la siguiente transformación localmente invertible de las coordenadas de estado de entrada dependiente *nominal* del modelo promedio no–lineal (4.4)

$$x_1 = \zeta_1 \quad ; \quad x_2 = -\Theta_1(1-\mu)\zeta_2 + \Theta_4 \tag{4.6}$$

y su transformación inversa asociada,

$$\zeta_1 = x_1 \; ; \; \zeta_2 = \frac{\Theta_4 - x_2}{\Theta_1(1-\mu)} \tag{4.7}$$

Usando la respectiva transformación de coordenadas de estado (4.6) (4.7), sobre el circuito promedio (4.4) uno obtiene la siguiente *Forma Canónica Generalizada de Observabilidad de Fliess* del modelo promedio del convertidor boost

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\theta_1\theta_2(1-\mu)^2 x_1 - \theta_3(x_2-\theta_4) - \frac{\dot{\mu}}{1-\mu}(x_2-\theta_4) \\
\eta &= x_1
\end{aligned} \tag{4.8}$$

La *dinámica de los ceros* asociada con el punto de equilibrio $x_1 = \zeta_1(U)$, $x_2 = 0$, está dada por la dinámica de 1er orden,

$$\dot{\mu} = -\frac{\theta_3}{(1-U)^2}(1-\mu)(\mu-U)(2-\mu-U) \tag{4.9}$$

La dinámica de los ceros exhibe dos puntos de equilibrio inestables $\mu = U - 2 < 0$ y $\mu = 1$. El único punto de equilibrio estable $\mu = U$ hace al modelo promediado un sistema de fase mínima en la región de interes.

El sistema trasformado (4.8), deseamos imponerle un comportamiento preestablecido como la siguiente dinámica, asintóticamente estable de segundo orden lineal e invariante en el tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -2\xi\omega_n x_2 - \omega_n^2(x_1 - Y) \\
\eta &= x_1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde ξ y ω_n son parámetros de diseño reflejan la particular necesidad de características transitorias ha imponerse sobre la salida promedio regulada $\eta = x_1$. La constante Y representa un valor de equilibrio deseado en lazo cerrado en estado estable de la variable de salida promediada η. En este caso los valores de parámetros son conocídos y así tambièn el valor deseado de salida, representada por la corriente, $Y = \zeta_1(U) = \Theta_3\Theta_4/\Theta_1\Theta_2(1-U)^2$.

La obtención del controlador dinámico es inmediata a partir de las ecuaciones (4.8) y (4.10) con la característica de ser una función de razón de trabajo linealizada, estabilizante. En términos de las variables trasformadas x_1 y x_2, la función de razón de trabajo, μ, se obtiene como la solución de la ecuación diferencial variante en el tiempo,

$$\dot{\mu} = \frac{1-\mu}{x_2-\theta_4}\left[2\xi\omega_n x_2 + \omega_n^2(x_1 - Y) - \theta_1\theta_2(1-\mu)^2 x_1 - \theta_3(x_2-\theta_4)\right] \tag{4.11}$$

En términos de las variables de estado promedio ζ_1 y ζ_2, el sintetizador dinámico de la razón de trabajo se obtiene como la siguiente expresión equivalente,

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\theta_1\zeta_2}\left[\left(\theta_1\theta_2(1-\mu)^2 - \omega_n^2\right)\zeta_1 + \left(2\xi\omega_n\theta_1 - \theta_1\theta_3\right)(1-\mu)\zeta_2 - 2\xi\omega_n\theta_4 + \omega_n^2 Y\right] \tag{4.12}$$

Los valores de μ, obtenidos de la solución en línea de la ecuación (4.11), representa la función de razón de trabajo efectiva, al implementarla sobre el convertidor representa una regulación discontínua, los valores de μ deben ser necesariamente limitados al intervalo $[0,1]$. Denotando por μ_a la *función de razón de trabajo efectiva* como

$$\mu_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mu(t) \geq 1 \\ \mu(t) & \text{for } 0 < \mu(t) < 1 \\ 0 & \text{for } \mu(t) \leq 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Es necesario el hacer notar que cuando el periodo de muestreo T es lo suficientemente pequeño, se prefiere trabajar con las variables de estado V y I, en lugar de las variables de promedio ζ_1, y ζ_2, para el cálculo en línea de la solución de la función de razón trabajo μ.

Este procedimiento precisa la parte medular para diseños en base a los modelos de estados promedios vía PWM. La justificación teórica de este procedimiento ha sido dado en Sira-Ramírez, 1993 [54].

Resumiendo, el controlador dinámico PWM ejecuta la estabilización asintóticamente de la corriente promedio de entrada en el inductor del circuito convertidor boost 4.1 hacia un valor de equilibrio constante deseado de valor $y = Y$, y esta dado por,

$$
\begin{aligned}
u &= \begin{cases} 1 \text{ for } & t_k \leq t < t_k + \mu_a(t_k)T \\ 0 \text{ for } & t_k + \mu_a(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \\
& \quad t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

donde $\mu_a(t_k)$ representan los valores muestreados de la función de la razón de trabajo real en el tiempo t_k, dado por (4.13). Mientras el cálculo y solución, de la función representada por la razón de trabajo $\mu(t)$ se obtiene en lìnea de,

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \frac{1}{\theta_1 V(t)} \Big[\left(\theta_1 \theta_2 (1-\mu)^2 - \omega_n^2 \right) \; I(t) + (2\xi\omega_n\theta_1 - \theta_1\theta_3)(1-\mu) \; V(t) \\
& \quad -2\xi\omega_n\theta_4 + \omega_n^2 Y \Big]
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

□ □ □

4.3 Estrategía de Control retroalimentado adaptativo para la regulación Indirecta de la Salida de Voltaje en Convertidores DC–DC

Circuito Convertidor Boost

Refierase al circuito convertidor boost figura 4.3, considerando la siguiente versión de modelo promedio del mismo convertidor, dado por,

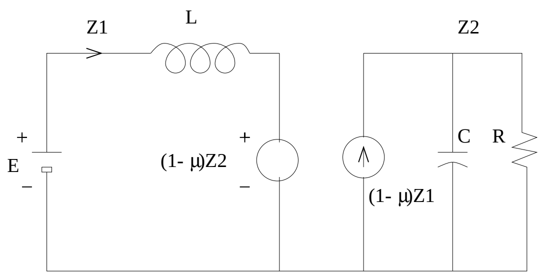

Figura 4.3: Convertidor "Boost", promedio.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= -\theta_1(1-\mu)\zeta_2+\theta_4\\ \dot{\zeta}_2 &= \theta_2(1-\mu)\zeta_1-\theta_3\zeta_2\\ y &= \zeta_1\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde θ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, representan los *valores de los parámetros efectivos* modelados por,

$$\theta_i = \Theta_i + \Delta\theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.2}$$

con Θ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, representando los *valores de los parámetros nominales*, asumiendo el conocimiento perfecto de ellos. Las cantidades, $\Delta\theta_i$; $i = 1, 2, 3, 4$ denotan las cantidades de los valores incrementales, de sus parámetros nominales, los cuales se asumen desconocidos. Considerese entonces, la transformación de coordenadas de estado del parámetro nominal usado para la linealización de entrada–salida del modelo promedio del convertidor boost en la sección anterior,

$$\begin{aligned}x_1 &= \zeta_1\\ x_2 &= -\Theta_1(1-\mu)\zeta_2+\Theta_4\end{aligned} \tag{4.3}$$

Claramente esta transformación del control parametrizado es invertible excepto cuando la función de razón de trabajo μ es idéntica a cero. La transformación inversa asociada tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= x_1\\ \zeta_2 &= \frac{\Theta_4 - x_2}{\Theta_1(1-\mu)}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Cuando la transformación de coordenadas de estado (4.3)-(4.4) se aplican al modelo real del convertidor boost (4.1)-(4.2), el sistema transformado no es efectivamente una forma Canónica de Observabilidad Generalizada de Fliess, sin embargo si un esquema denominada por nosotros *Forma Canónica Retroalimentada Incremental Generalizada Pura.* El Sistema transformado se alcanza fàcilmente dada por,

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_2+\Delta\theta^T\gamma_1(x_1,x_2)\\ \dot{x_2} &= \dot{\mu}\left(\frac{-x_2+\Theta_4}{(1-\mu)}\right)-\Theta_1\Theta_2(1-\mu)^2x_1-\Theta_3(x_2-\Theta_4)+\Delta\theta^T\gamma_2(x_1,x_2,\mu)\\ y &= x_1\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma_1^T(x_1,x_2) & = & \left[\begin{array}{cccc} \frac{x_2-\Theta_4}{\Theta_1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\gamma_2^T(x_1,x_2,\mu) & = & \left[\begin{array}{cccc} 0 & -\Theta_1(1-\mu)^2 x_1 & -x_2+\Theta_4 & 0 \end{array}\right] \\
\\
\Delta\theta^T & = & \left[\begin{array}{cccc} \Delta\theta_1 & \Delta\theta_2 & \Delta\theta_3 & \Delta\theta_4 \end{array}\right]
\end{array}
\qquad (4.6)
$$

Para facilitar la notación,

$$
f(x,\mu,\dot{\mu},\Theta) = \dot{\mu}\left(\frac{-x_2+\Theta_4}{1-\mu}\right) - \Theta_1\Theta_2(1-\mu)^2 x_1 - \Theta_3(x_2-\Theta_4) \qquad (4.7)
$$

El sistema transformado (4.5) se asemeja bastante a la *Forma Conónica Retroalimentada del Parámetro Puro* desarrollada por Kanellakopoulos (1991) [45], excepto por la presencia de la entrada de control (razón de trabajo),μ, en el vector regresor γ_2 y en la presencia de la primera derivada temporal $\dot{\mu}$, de la entrada de control en la segunda ecuación diferencial. Esta entrada de control derivada actúa como la entrada de control, mientras la entrada de control μ puede ser vista como una variable de estado adicional. A continuación aplicamos el algoritmo adaptativo "un paso atras", desarrollado por Kanellakopoulos [47], al modelo transformado (4.5)-(4.6).

Paso 0

Sea Y el valor de equilibrio deseado en estado estable de la variable de salida x_1 y z_1, el error de estabilización esta dado por,

$$
z_1 = x_1 - Y \qquad (4.8)
$$

Paso 1

Considerese la ecuación del error de estabilización

$$
\dot{z}_1 = x_2 + \Delta\theta^T \gamma_1(x_1,x_2) \qquad (4.9)
$$

Supongase que la variable trasformada x_2 puede ser usada como un "pseudo–control" en (4.9), obteniendose mediante el cálculo del valor requerido x_2 el cual estabiliza la variable del error z_1 a cero. Obteniendo el vector $\Delta\theta$ desconocido de x_2. usando el "principio de equivalencia" remplazamos el vector $\Delta\theta$ y por un valor estimado en la "Ley de control" estabilizante ficticia. Posteriormente veamos también la ley de actualización del parámetro para la estimación del vector del parámetro incremental $\Delta\theta$, denotado por $\widehat{\Delta\theta}^1$. Esta especificación resulta en una adaptación estable y convergente a cero de la variable del error z_1. El superindice "1" denota una primera estimación de $\Delta\theta$. Sea c_1 una constante de diseño estrictamente positiva. Cuando se realiza la acción del "pseudo–control" se tiene la siguiente expresión para x_2,

$$x_2 = -c_1\, z_1 - \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}(x_2 - \Theta_4) - \widehat{\Delta\theta_4}^1 \quad ; \quad c_1 > 0 \tag{4.10}$$

donde $\widehat{\Delta\theta_i}^1$, $i = 1, 4$, denota una primera estimación de $\Delta\theta_i$, $i = 1, 4$. Una simple función de estabilidad de Lyapunov muestra que el argumento del "pseudo–controlador" y la ley de actualización

$$\dot{\widehat{\Delta\theta}}^1 = z_1 \gamma_1(x_1, x_2) \tag{4.11}$$

conllevan a un sistema de lazo cerrado estable para la cual z_1 garantiza su convergencia a cero. Sin embargo x_2 no es realmente la entrada de control, definamos una variable de error del "pseudo control", z_2, como la diferencia entre x_2 y su valor requerido, calculada en (4.10). Sea

$$z_2 = x_2 - \left[-c_1\, z_1 - \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}(x_2 - \Theta_4) - \widehat{\Delta\theta_4}^1 \right] \tag{4.12}$$

Resolviendo para x_2 de (4.12) y usando (4.8) uno obtiene un nuevo estado, definiendo una transformación de coordenadas, para las variables de estabilización del error "pseudo–control", respectivamente,

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - Y \\ z_2 &= c_1 z_1 + x_2 \left(1 + \frac{\widehat{\Delta\Theta_1}^1}{\Theta_1} \right) - \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta_4}^1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

La correspondiente transformación inversa obtenida es la siguiente,

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + Y \\ x_2 &= \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta_1}^1} \left[z_2 - c_1 z_1 + \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}\Theta_4 - \widehat{\Delta\theta_4}^1 \right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

La primera ecuación del Sistema muestreado puede ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 - c_1 z_1 + \\
&+ \left(\Delta\theta_1 - \widehat{\Delta\theta_1}^1\right)\left[\left(\frac{1}{\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta_1}^1}\left[z_2 - c_1 z_1 + \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}\Theta_4 - \widehat{\Delta\theta_4}^1\right] - \frac{\Theta_4}{\Theta_1}\right] + \\
&+ \left(\Delta\theta_4 - \widehat{\Delta\theta_4}^1\right) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

La cual puede ser brevemente expresada como,

$$
\dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 + (\Delta\theta - \widehat{\Delta\theta}^1)^T w_1(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) \qquad (4.16)
$$

donde

$$
w_1^T(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) = [\quad (\frac{1}{\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta_1}^1}\left[z_2 - c_1 z_1 + \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}\Theta_4 - \widehat{\Delta\theta_4}^1\right] - \frac{\Theta_4}{\Theta_1}) \quad 0 \quad 0 \quad 1] \qquad (4.17)
$$

Note que las leyes de actualización correspondientes a $\widehat{\Delta\theta}_2^1$ y $\widehat{\Delta\theta}_3^1$ conllevan a valores constantes para estas estimaciones. Observese que estos dos parámetros estimados no se necesitan en este primer paso del algoritmo. Sea W_1^1 el primer componente del vector regresor $w_1(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1)$. La primera ley de actualización (4.11) puede ser reescrita, en términos de las nuevas variables del error z_1,z_2, como

$$
\dot{\widehat{\Delta\theta}}^1 = z_1\, w_1(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) \qquad (4.18)
$$

Paso 2

Procedamos a completar la transformación de coordenadas de estado (4.13)-(4.14) de las originales de fase por la consideración de la nueva ecuación diferencial para el error z_2 y "pseudo–controlador". Usando la definición de z_2, y z_1 además la primera ley de actualización del parámetro incremental involucrando los componentes del vector $\Delta\theta$, uno obtiene la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_2 = \left(1 + \frac{\widehat{\Delta\theta_1}^1}{\Theta_1}\right)\Bigg[&- \frac{\dot{\mu}}{1-\mu}\left(x_2(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) - \Theta_4\right) - \Theta_1\Theta_2(1-\mu)^2(z_1 + Y) \\
&- \Theta_3\left(x_2(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) - \Theta_4\right) \\
&- \Delta\theta_2\Theta_1(1-\mu)^2(z_1 + Y) - \Delta\theta_3\left(x_2(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) - \Theta_4\right)\Bigg] +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+c_1\left[z_2 - c_1 z_1 - \widehat{\Delta\theta}_1{}^1 W_1^1 - \widehat{\Delta\theta}_4{}^1\right] + z_1\left(1 + (W_1^1)^2\right)\\
&+c_1\left(\Delta\theta_1 W_1^1 + \Delta\theta_4\right)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

donde $x_2(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1)$ esta dado por la segunda ecuación de (4.14), la sustitución se indica solamente así como en las consecuentes ecuaciones, para facilitar la visualización de las mismas.

Ahora si la dinámica obtenida en (4.19) para z_2, la dinámica de un comportamiento asintóticamente estable para z_2, está dado por,

$$
\dot{z}_2 = -c_2 z_2 \quad ; \quad c_2 > 0 \tag{4.20}
$$

uno puede inmediatamente resolver para la entrada de control derivada requerida $\dot{\mu}$, una vez más, con ayuda del principio de equivalencia. En este instante el valor desconocido del vector $\Delta\Theta$ puede ser reemplazado por un nuevo vector de parámetros estimados, denotado por $\widehat{\Delta\theta}^2$. Entonces, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \frac{(1-\mu)\Theta_1}{\left(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1{}^1\right)(x_2 - \Theta_4)}\Bigg\{c_2 z_2 + c_1\left[z_2 - c_1 z_1 - (\widehat{\Delta\theta}^1)^T w_1(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1)\right]\\
&+ z_1[1 + (W_1^1)^2] + c_1(\widehat{\Delta\theta}^2)^T w_1(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) - \left(1 + \frac{\widehat{\Delta\theta}_1^1}{\Theta_1}\right)\Big[\Theta_1\Theta_2(1-\mu)^2(z_1 + Y)\\
&+ \Theta_3(x_2 - \Theta_4) + \widehat{\Delta\theta}_2{}^2\Theta_1(1-\mu)^2(z_1 + Y) + \widehat{\Delta\theta}_3{}^2(x_2 - \Theta_4)\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

donde $\widehat{\Delta\theta}_j{}^2$, $j = 2, 3$, representan las nuevas estimaciones de los componentes del vector de parámteros nominales $\Delta\theta_j$; $j = 2, 3$, y x_2 esta dada por (4.14). La expresión de la variables del error z_2, controlada dinámicamente (así como el comportamiento en lazo cerrado z_2) es calculada como,

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= -c_2 z_2 + \left(1 + \frac{\widehat{\Delta\theta}_1{}^1}{\Theta_1}\right)\Big[-(\Delta\theta_2 - \widehat{\Delta\theta}_2{}^2)\Theta_1(1-\mu)^2(z_1 + Y)\\
&- (\Delta\theta_3 - \widehat{\Delta\theta}_3{}^2)(x_2 - \Theta_4)\Big] + c_1\left[\left(\Delta\theta_1 - \widehat{\Delta\theta}_1{}^2\right)W_1^1 + \left(\Delta\theta_4 - \widehat{\Delta\theta}_4{}^2\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

La cual puede ser expresada brevemente

$$
\dot{z}_2 = -c_2 z_2 + (\Delta\theta - \widehat{\Delta\theta}^2)^T w_2(z_1, z_2, \mu, \widehat{\Delta\theta}^1, \widehat{\Delta\theta}^2) \tag{4.23}
$$

El vector regresor para la nueva estimación del proceso está dada por

$$w_2(z_1, z_2, \mu, \widehat{\Delta\theta}^1, \widehat{\Delta\theta}^2) = \left(1 + \frac{\widehat{\Delta\theta}_1^1}{\Theta_1}\right) \gamma_2(z_1, z_2, \mu, \widehat{\Delta\theta}^1, \widehat{\Delta\theta}^2) + c_1 w_1(z_1, z_2, \widehat{\Delta\theta}^1) \tag{4.24}$$

Note que la dependencia implícita de w_2 sobre $\widehat{\Delta\theta}^2$ a través de μ, la solución es como la ecuación (4.21).

Como en el paso previo, la ley de adaptación del vector del parámetro incremental de la nueva estimación $\widehat{\Delta\theta}^2$, puede ser visto simultaneamente como la ejecución de un proceso de adaptación estable y una convergencia asintóticamente a cero de la variable del error z_2. del "pseudo–control" . Así la nueva ley de actualización del parámetro incremental está dada por

$$\dot{\widehat{\Delta\theta}}^2 = z_2\ w_2(z_1, z_2, \mu, \widehat{\Delta\theta}^1, \hat{\Delta}\theta^2) \tag{4.25}$$

Resumen de las expresiones del controlador adaptativo

El controlador adaptativo PWM se resume en términos de las variables originales de estado del sistema.

La constante Y establece el valor deseado o consigna de la entrada de corriente en el inductor $I(t)$. Las constantes c_1, c_2 son seleccionadas en el diseño satisfaciendo c_1, $c_2 > 2$.

La ley de retroalimentación adaptativa regulando la función de posición del interruptor se obtiene como

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} 1 & \text{for } t_k \leq t < t_k + \mu_a(t_k)T \\ 0 & \text{for } t_k + \mu_a(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \\ & \quad t_k + T = t_{k+1} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde $\mu_a(t)$ se obtiene de la operación de acotamiento llevada a cabo sobre la razón de trabajo calculada μ de la siguiente manera

$$\mu_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu(t) \ \leq \ 1 \\ \mu(t) & \text{if } 0 \ < \ \mu(t) \ < \ 1 \\ 0 & \text{if } \mu(t) \ \leq \ 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

La función de razón de trabajo μ se obtiene como solución de la siguiente ecuación diferencial variante en el tiempo apartir de una condición inicial, la cual no cause una saturación permanente en la razón de trabajo efectiva $\mu_a(t)$,

$$\dot{\mu} = \frac{1}{V(t)\left(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1\right)} \Big\{ - (I(t) - Y)(1-\mu)^2 V^2(t) + (\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu) \times$$

$$
\begin{aligned}
&\left[(\Theta_2 + \widehat{\Delta\theta}_2^2)(1-\mu)I(t) - (\Theta_3 + \widehat{\Delta\theta}_3^2)V(t)\right] - (I(t) - Y) \\
&-c_1\left[-(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^2)(1-\mu)V(t) + (\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta_4}^2)\right] \\
&+c_2\left[(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)V(t) - (\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta}_4^1) - c_1(I(t)-Y)\right]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

los valores estimados de los parámetros del controlador se obtienen como la solución en lìnea del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_1{}^1 &= -(I(t)-Y)(1-\mu)V(t) \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_2{}^1 &= 0 \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_3{}^1 &= 0 \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_4{}^1 &= -(I(t)-Y) \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_1{}^2 &= \left[-(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)V(t) + (\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta}_4^1) + c_1(I(t)-Y)\right]\left[-c_1(1-\mu)V(t)\right] \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_2{}^2 &= \left[-(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)V(t) + (\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta}_4^1) + c_1(I(t)-Y)\right]\left[-(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)^2 I(t)\right] \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_3{}^2 &= \left[-(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)V(t) + (\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta}_4^1) + c_1(I(t)-Y)\right]\left[(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)V(t)\right] \\
\dot{\widehat{\Delta\theta}}_4{}^2 &= \left[-(\Theta_1 + \widehat{\Delta\theta}_1^1)(1-\mu)V(t) + (\Theta_4 + \widehat{\Delta\theta}_4^1) + c_1(I(t)-Y)\right]c_1
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

4.8 Simulación. Se evaluó mediante simulaciones el modelo del circuito convertidor boost perturbado en conjunción con el control adaptativo descrito por las ecuaciones (4.26)-(4.29). Sea $\nu(t)$ una señal incierta no modelada, estocástica acotada, y acoplada, hipotéticamente sobre el circuito a través de la fuente externa de voltaje E. El controlador adaptativo vía PWM diseñado dinámicamente (4.26)-(4.29) fué utilizado para la regulación indirecta en la variable de la entrada de corriente en el inductor $I(t)$ del convertidor, utilizandose de preferencia las variables de estado reguladas discontínuamente $I(t)$ y $V(t)$ en vez de las promedio ζ_1, ζ_2.

La siguiente ecuación corresponde al modelo del circuito perturbado usado en las simulaciones en la computadora.

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= -\frac{1}{L}(1-u)\,V(t) + \left(\frac{E+\nu(t)}{L}\right)\\ \dot{V}(t) &= \frac{1}{C}(1-u)\,I(t) - \frac{1}{RC}V(t)\\ y &= I(t)\end{aligned} \tag{4.30}$$

El resultado de la simulación se muestra en la figura 4.4, delineandose el comportamiento del circuito controlado. Los valores nominales de los parámetros del convertidor fuerón seleccionados como $L = 20$ mH, $C = 20$ mF, $R = 30\ \Omega$ y $E = 15$. Estos valores proporcionan los datos redondeados $\Theta_1 = 50$; $\Theta_2 = 5.0 \times 10^4$; $\Theta_3 = 1.667 \times 10^3$ and $\Theta_4 = 750$. Los valores de parámetros efectivos usados en la simulaciones se ubicarón en $\theta_1 = 55$, $\theta_2 = 4.5 \times 10^3$, $\theta_3 = 1.5 \times 10^3$ y $\theta_4 = 825$.

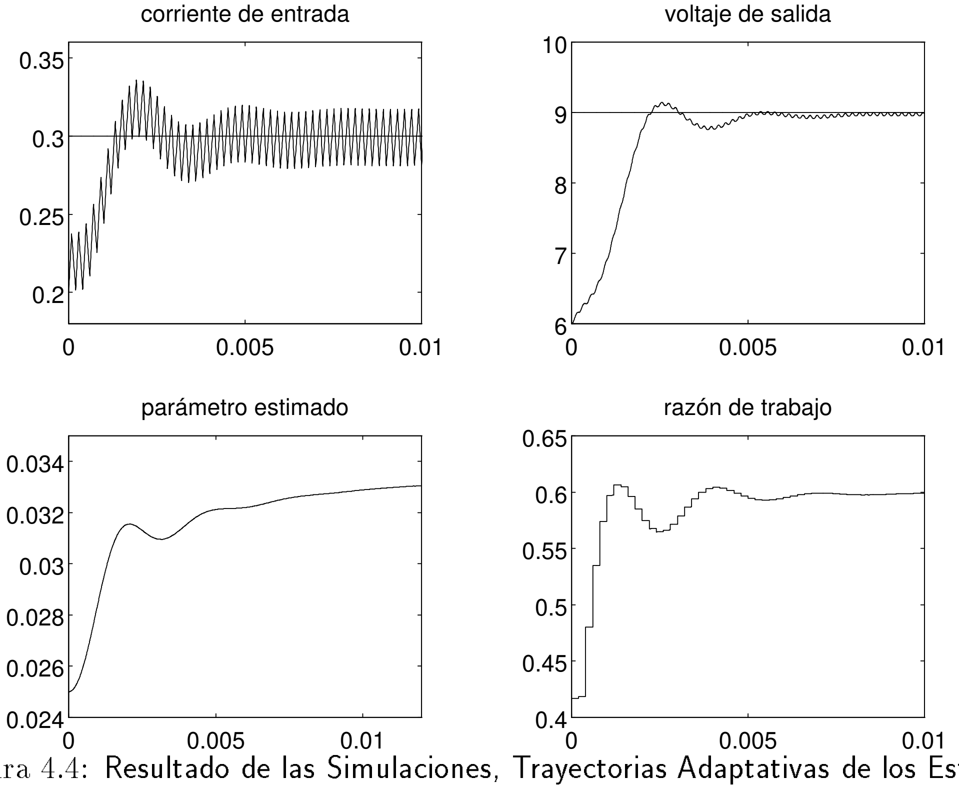

Figura 4.4: Resultado de las Simulaciones, Trayectorias Adaptativas de los Estado.

Estos valores, fuerón considerados completamente desconocidos en la implementación del controlador. En la figura 4.4, la respuesta descrita por la entrada de la corriente en el inductor $I(t)$ alcanza el valor de equilibrio (nominal) preasignado $I(t) = Y = 3.125$, la cual corresponde a la salida del voltaje nominal en el capacitor $V(t) = 37.5$ y una razón de trabajo $U = 0.6$. la frecuencia de muestreo PWM fue ubicado en 10KHz, la evolución asintóticamente estable de la razón de trabajo $\mu(t)$ alcanza el valor de equilibrio $\mu = U = 0.6$, también se muestra las acciones de conmutación debidas al PWM en un lapso de 0.1ms. Las trayectorias de los valores de los parámetros incrementales estimados $\widehat{\Delta\theta}_1^1(t)$, $\widehat{\Delta\theta}_4^2(t)$, $\widehat{\Delta\theta}_1^2$,$\widehat{\Delta\theta}_2^2$ $\widehat{\Delta\theta}_3^2$ y $\widehat{\Delta\theta}_4^2$, se muestra también en esta figura , al final se observa la entrada de perturbación estocástica $\nu(t)$.

Convertidor buck-boost

En esta sección resumiremos brevemente las expresiones del controlador obtenidas del procedimiento de cálculo mediante la técnica "un paso atras" aplicado a los parámetros inciertos transformados nominalmente del modelo del convertidor buck-boost promedio vía PWM.

Considerese el circuito convertidor buck-boost mostrado en la figura 4.5.

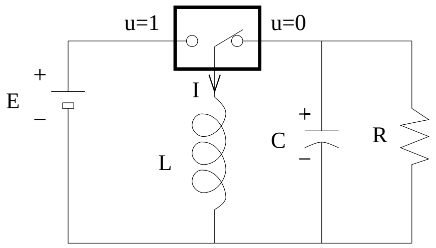

Figura 4.5: Circuito Convertidor "Buck–Boost".

Convertidor buck-boost, modelo en espacio de estado

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= \frac{1}{L}(1-u)\,V(t) + \frac{E}{L}u \\ \dot{V}(t) &= -\frac{1}{C}(1-u)\,I(t) - \frac{1}{RC}V(t) \\ y(t) &= I(t) \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde $I(t)$ y $V(t)$, representan las variables de entrada de corriente en el inductor y salida de voltaje en el capacitor, respectivamente. La cantidad positiva E es una entrada de voltaje externa constante. La variable u denota la función de posición del interruptor tomando valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. La salida, $y(t)$, del sistema está representado por la entrada de corriente en el inductor $I(t)$.

Definición de parámentros nominales

$$\Theta_1 = \frac{1}{L} \quad ; \quad \Theta_2 = \frac{1}{C} \quad ; \quad \Theta_3 = \frac{1}{RC} \quad ; \quad \Theta_4 = \frac{E}{L} \tag{4.32}$$

Parámetros del modelo incierto

$$\theta_i = \Theta_i + \Delta\theta_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.33}$$

Modelo promedio vía PWM del convertidor buck-boost

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \theta_1(1-\mu)\,\zeta_2 + \theta_4\mu \\ \dot{\zeta}_2 &= -\theta_2(1-\mu)\,\zeta_1 - \theta_3\zeta_2 \\ \eta &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Transformación nominal del Modelo buck-boost vía PWM para la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada de Fliess

$$\begin{aligned} x_1 &= \zeta_1 \quad ; \quad x_2 = \Theta_1(1-\mu)\zeta_2 + \Theta_4\mu \\ \zeta_1 &= x_1 \quad ; \quad \zeta_2 = \frac{x_2 - \Theta_4\mu}{\Theta_1(1-\mu)} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Variables de fase generalizadas del modelo incierto transformado del convertidor buck-boost

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \Delta\theta^T\gamma_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, \mu, \dot{\mu}) + \Delta\theta^T\gamma_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta\theta^T &= [\Delta\theta_1 \;\; \Delta\theta_2 \;\; \Delta\theta_3 \;\; \Delta\theta_4] \\ \gamma_1^T(x_1, x_2) &= \left[\frac{x_2 - \Theta_4\mu}{\Theta_1} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \mu\right] \\ \gamma_2^T(x_1, x_2, \mu) &= \left[0 \;\; -\Theta_1(1-\mu)^2 x_1 \;\; -x_2 + \Theta_4\mu \;\; 0\right] \\ f(x_1, x_2, \mu, \dot{\mu}) &= \dot{\mu}\left(\Theta_4 - \frac{x_2 - \Theta_4\mu}{1-\mu}\right) - \Theta_1\Theta_2(1-\mu)^2 x_1 - \\ &- \Theta_3(x_2 - \Theta_4\mu) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Resumen de expresiones

Control retroalimentado adaptativo

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} 1 & \text{for } t_k \leq t < t_k + \mu_a(t_k)T \\ 0 & \text{for } t_k + \mu_a(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \\ & t_k + T = t_{k+1} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde $\mu_a(t)$ se obtiene de la operación de limitación.

$$\mu_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu(t) \ \leq \ 1 \\ \mu(t) & \text{if } 0 \ < \ \mu(t) \ < \ 1 \\ 0 & \text{if } \mu(t) \ \leq \ 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

Nosotros definimos $\widehat{\theta}_i^j$, $i = 1, \ldots, 4$; $j = 1, 2$ en lugar de $\Theta_i + \widehat{\Delta\theta}_i^j$, en las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \dot{\mu} \ = \ & \frac{1}{\left(\widehat{\theta_4}^1 - \widehat{\theta_1}^1 V(t)\right)} \Bigg\{ -(I(t) - Y)(1-\mu)^2 V^2(t) + \widehat{\theta_1}^1 \widehat{\theta}_2^2 (1-\mu)^2 I(t) \\ & + \widehat{\theta}_1^1 \widehat{\theta}_3^2 (1-\mu) V(t) - (I(t) - Y)\mu - c_1 \left(\widehat{\theta}_1^2 (1-\mu) V(t) + \widehat{\theta_4}^2 \mu \right) \\ & + c_2 \left[\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu) V(t) + \widehat{\theta}_4^1 + c_1 (I(t) - Y) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\theta}}_1^{\,1} &= (I(t) - Y)(1-\mu)V(t) \\ \dot{\widehat{\theta}}_2^{\,1} &= 0 \\ \dot{\widehat{\theta}}_3^{\,1} &= 0 \\ \dot{\widehat{\theta}}_4^{\,1} &= (I(t) - Y)\mu \\ \dot{\widehat{\theta}}_1^{\,2} &= \left[\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu) V(t) + \widehat{\theta}_4^1 \mu + c_1 (I(t) - Y) \right] \left[c_1 (1-\mu) V(t) \right] \\ \dot{\widehat{\theta}}_2^{\,2} &= \left[\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu) V(t) + \widehat{\theta}_4^1 \mu + c_1 (I(t) - Y) \right] \left[-\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu)^2 I(t) \right] \\ \dot{\widehat{\theta}}_3^{\,2} &= \left[\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu) V(t) + \widehat{\theta}_4^1 \mu + c_1 (I(t) - Y) \right] \left[-\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu) V(t) \right] \\ \dot{\widehat{\theta}}_4^{\,2} &= \left[\widehat{\theta}_1^1 (1-\mu) V(t) + \widehat{\theta}_4^1 \mu + c_1 (I(t) - Y) \right] c_1 \mu \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.9 Simulación. Las simulaciones en computadora se realizarón en base al modelo perturbado del circuito convertidor "buck–boost",

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \frac{1}{L}(1-u)\,V(t) + \left(\frac{E+\nu(t)}{L}\right)u \\ \dot{V}(t) &= -\frac{1}{C}(1-u)\,I(t) - \frac{1}{RC}V(t) \\ y &= I(t) \end{aligned} \tag{4.42}$$

aplicando el controlador adaptativo descrito (4.38)-(4.41).

El resultado de la simulación se muestra en la figura 4.6 delineandose el comportamiento del convertidor controlado.

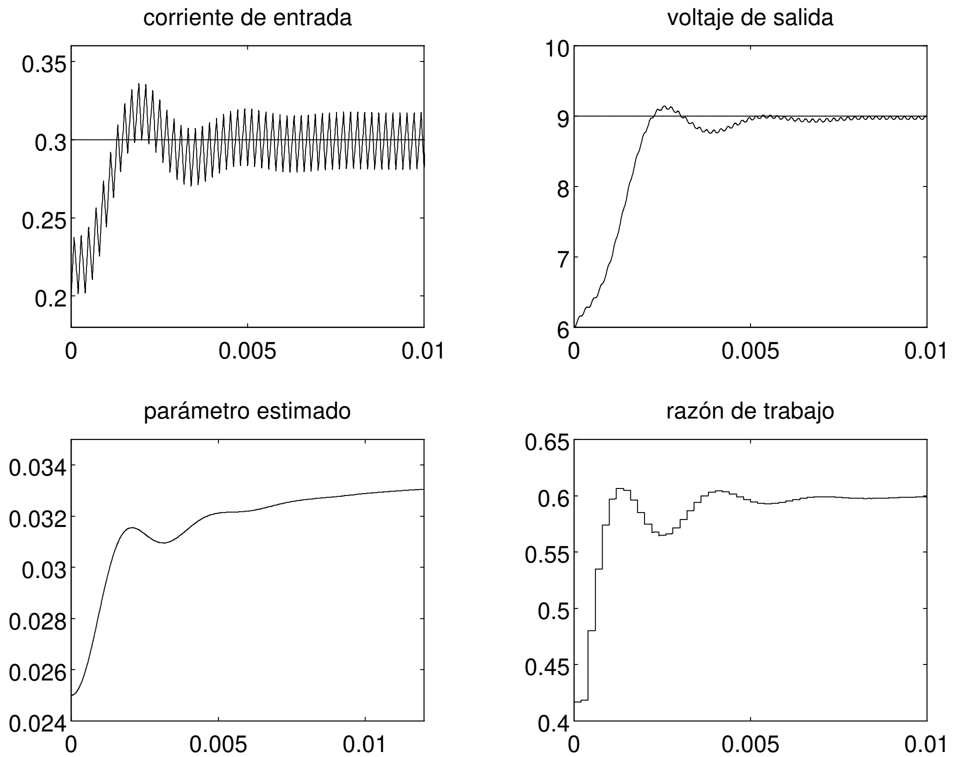

Figura 4.6: Resultados de la Simulación en el Circuito "Buck–Boost".

Los valores nominales de los parámetros del convertidor fuerón seleccionados iguales al caso del convertidor "boost" $L = 20$ mH, $C = 20$ mF, $R = 30\ \Omega$, y $E = 15$. Los valores de parámetros efectivos usados en las simulaciones fuerón también los mismos de antes.

En la figura 4.6 la trayectoria de la respuesta de la entrada de corriente en el inductor $I(t)$ alcanza el valor de equilibrio nominal preasignado $I(t) = Y = 1.5$,amp., y corresponde a la salida de voltaje en el capacitor $V(t) = -21.38$ volts. La frecuencia de muestreo PWM fue seleccionada y ubicada en 10KHz. A la vez se observa en la figura la evolución asitóticamente estable de la función de razón de trabajo $\mu(t)$ alcanzando su valor de equilibrio $\mu = U = 0.55$, así como una porción (1ms) de la acción del interruptor tambien vease las trayectorias de los valores de parámetros incrementales estimados, $\widehat{\Delta\theta}_1^1(t)$, $\widehat{\Delta\theta}_4^2(t)$, $\widehat{\Delta\theta}_1^2$,$\widehat{\Delta\theta}_2^2$ $\widehat{\Delta\theta}_3^2$ y $\widehat{\Delta\theta}_4^2$. Finalmente la entrada de señal de perturbación estocástica generada por la computadora

En resumen se propuso el algoritmo de la técnica “un paso atras” en base a una linealización dinámica de entrada–salida para el uso del control retroalimentado adaptativo para la regulación del modelo promedio vía PWM de convertidores DC–DC. El método propuesto ejecuta la regulación indirecta del voltaje de salida en el capacitor considerando la corriente en el inductor como la variable controlada, haciendo a un lado el problema de fase no-mínima asociada con la regulación directa del de voltaje de salida. La simulación del sistema en lazo cerrado exhibe una gran robustez con respecto a la perturbación estocástica externa acoplada y no modelada.

La sobreparametrización es implícita en el procedimiento de “un paso atras” cuando se aplica a sistemas de la Forma Canónica de Kanellakopoulos de la Retroalimentación del Parámetro Puro. Esta característica contribuye al incremento substancialmente de la complejidad del controlador. Un método alternativo al presentado aquí constituye la posibilidad de evitar la sobreparametrización asociada con la actualización del proceso de estimación del parámetro incremental. Los desarrollos de fundamentos a estas técnicas vistas pueden ser encontradas en Krstíc (1992) [49], y un método alternativo en Sira–Ramírez (1995b) [27].

Con respecto a la robustez del esquema propuesto, a la perturbación externa del tipo acoplado, el comportamiento es inherente al i) delineada desde el punto de vista entrada–salida presentada en la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada, utilizada en la obtención del controlador, y ii) las características de robustez asociada con las políticas de control retroalimentado discontínuamente vía modulación de ancho de pulso.

□ □ □

Capítulo 5

Discretización Exacta y Diseño de Controladores para Convertidores de Potencia DC–DC Derivados.

Es el propósito de este capítulo explorar, en detalle, la factibilidad del diseño de controladores PWM para la estabilización y seguiniento de señales en los convertidores de potencia derivados DC–DC. La aproximación se sustenta en una discretización exacta de la corriente de entrada muestreada. Algunas otras políticas de regulación en tiempo discreto basadas en una discretización y linealización aproximadas fueron exploradas por Ehsani *et al* [6]. También existe una discretización aproximada para fuentes de potencias DC–DC en Kassakian *et al* [12]. Otras investigaciones, desde un punto de vista distinto al control retroalimentado, son las de Rashid [23]. Para mayor información sobre los convertidores DC–DC el lector puede referirse a la colección, recientemente publicada, de articulos editados por Bose [2].

En este capítulo presentamos los fundamentos de una discretización exacta para el problema de estabilización de la corriente de entrada, en las versiones derivadas de los convertidores "buck", "boost" y "buck–boost".

□ □ □

5.1 Controladores mediante un Esquema de Discretización Exacta vía PWM.

En esta sección se consideran los convertidores derivados DC–DC asociados con una estrategia de regulación retroalimentada PWM y sus modelos alcanzados a través de una discretización exacta. El cálculo fuera de línea del valor del "rizo" de la corriente de entrada en estado estacionario permite en forma efectiva darle solución al problema de estabilización de la corriente promedio de entrada.

Convertidor "Buck–Derivado".

Considere el circuito del convertidor "buck–derivado" que se muestra en la figura 5.1 (Rashid [23]).

El modelo, regulado mediante conmutación, que describe la conducta de la corriente de entrada, denotada por x, es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x + \frac{E}{L}u \\ y &= Rx \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde y es el voltaje de salida y los parámetros R, L y E vienen dados, respectivamente, por la resistencia de carga , la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable u denota la *función de posición del interruptor* tomando valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$.

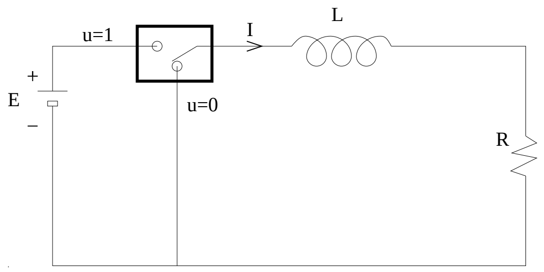

Figura 5.1: Circuito Convertidor "Buck–Derivado".

Una estrategia de regulación, basada en una especificación de la función de posición del interruptor del tipo PWM, puede ser expresada (vea Sira–Ramírez *et al* 1993) como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{para} \quad t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \tag{5.2}$$
$$t_{k+1} = t_k + T \ ; \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\mu(\cdot)$ es conocida como la *función de razón de trabajo*, adoptando valores en el intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real. T es el período de muestreo y t_k es el instante de muestreo. Un ejemplo típico de la función de posición de un interruptor gobernada por una política PWM es expuesta en la figura 5.2.

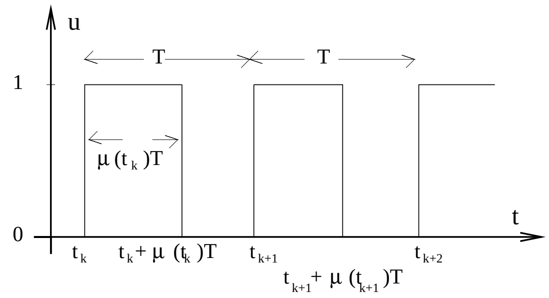

Figura 5.2: Función de Posición del Interruptor mediante una Política PWM.

Puesto que la razón de trabajo μ es determinada en línea de un modo retroalimentado, es decir, calculada como una función explícitamente dependiente del valor muestreado de la corriente de entrada $x(t_k)$ sobre cada instante t_k, podemos obtener valores de μ fuera del intervalo $[0, 1]$. Debemos, por lo tanto, distinguir entre la *función de razón de trabajo calculada*, denotada por $\mu_c(\cdot)$ y la *función de razón de trabajo* $\mu(\cdot)$. La relación entre estas variables es simplemente:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu_c(t) \ > \ 1 \\ \mu_c(t) & \text{para } 0 \leq \ \mu_c(t) \ \leq \ 1 \\ 0 & \text{para } \mu_c(t) \ < \ 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

La función de razón de trabajo es así la limitación forzada, dentro del intervalo $[0, 1]$, de la razón de trabajo calculada.

El convertidor "buck–derivado" debe su popular nombre de "chopper" al hecho de que la corriente de entrada se encuentra limitada al intervalo $[0, E/R]$, esto se puede verificar fácilmente a partir de las ecuaciones del circuito. El voltaje de salida producido por el convertidor no puede, por lo tanto, exceder el valor E de la fuente externa de voltaje.

Es ampliamente conocido que la trayectoria controlada vía PWM, $x(t)$, presenta un "rizo" natural, o movimiento en "zig–zag" ocasionado por la discontinuidades asociadas con la variable de entrada $u(t)$. En el siguiente fragmento se elabora un modelo de tiempo discreto que reproduce el valor del estado muestreado sobre cada instante t_k. Los valores del "rizo" son despreciados por tal modelo pero, ellos se pueden calcular a partir de algunas consideraciones adicionales.

Discretización Exacta.

La naturaleza lineal de las dos posibles topologías del circuito del convertidor "buck–derivado" (5.1) nos facilita desarrollar un modelo *exacto* en tiempo discreto para la evolución del valor muestreado de la corriente de entrada en el convertidor , cuando éste se encuentra sujeto a una política de conmutación de la forma (5.2). Dado el valor de x en el instante t_k, denotado por $x(t_k)$, el valor de la corriente de entrada sobre el final del "pulso", de ancho $\mu(t_k)T$, se encuentra despues de emplear la *formula de Cauchy* como :

$$x(t_k + \mu(t_k)T) = e^{-\theta_1 \mu(t_k)T} x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1 - e^{-\theta_1 \mu(t_k)T}\right] \tag{5.4}$$

donde los parámetros θ_1 y θ_2 denotan los cocientes R/L y E/L, respectivamente.

El valor muestreado de la corriente de entrada al final del intervalo de muestreo se obtiene, luego de algunos cálculos, como:

$$x(t_k + T) = e^{-\theta_1 T} x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\theta_1 T}\left[e^{\theta_1 \mu(t_k)T} - 1\right] \tag{5.5}$$

Si denotamos $\Psi_1 = e^{-\theta_1 T}$ y $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$, el modelo en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrito sobre los instantes de muestreo, está dado por :

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1 x(t_k) + \Psi_1 \Psi_2 \left[\Psi_1^{-\mu(t_k)} - 1\right] \tag{5.6}$$

donde el valor de la función de razón de trabajo sobre el instante t_k, $\mu(t_k)$, parece ser, efectivamente, la "entrada de control", siendo especificada en el inicio de cada período de muestreo. El modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es, por lo tanto, no lineal en la nueva entrada de control, $\mu(t_k)$.

El único autovalor asociado con la dinámica lineal del estado muestreado, dado por Ψ_1, es evidentemente positivo y estrictamente menor que la unidad. El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por x_∞^-, que corresponde a una razón de trabajo constante de valor μ_∞, se consigue a partir de (5.6), como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1 \Psi_2}{1 - \Psi_1}\left(\Psi_1^{-\mu_\infty} - 1\right) \tag{5.7}$$

El indice superior "$^-$" en (5.7) refiere a la posición "baja" de la trayectoria en "zig-zag" parcialmente descrita por (5.6) (vea figura 5.3).

Evidentemente, una política de regulación retroalimentada la cual especifica la función de razón de trabajo $\mu(t_k)$ unicamente en base al estado muestreado $x(t_k)$ no es, de forma alguna, satisfactoria. La razón para tal declaración surge del hecho que el "rizo", inevitablemente asociado con la evolución regulada mediante conmutación de $x(t_k)$, no es considerado por el modelo (5.6). Uno debe también analizar los valores de $x(t)$ sobre el final de cada pulso que ocurre dentro del período de muestreo de longitud T. En otras palabras, es necesario tomar en cuenta el valor de $x(t)$ en los instantes $t = t_k + \mu(t_k)T$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ (vease figura 5.3).

Ahora, referimos el valor de x sobre los instantes $t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T$ y $t_k + \mu(t_k)T$ a fin de obtener el valor de la "esquina superior" de la trayectoria en "zig-zag" de la corriente de entrada.

Usando la formula Cauchy obtenemos:

$$x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T) = \Psi_1^{\mu(t_{k+1})} \Psi_1^{1-\mu(t_k)} x(t_k + \mu(t_k)T) + \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}) \tag{5.8}$$

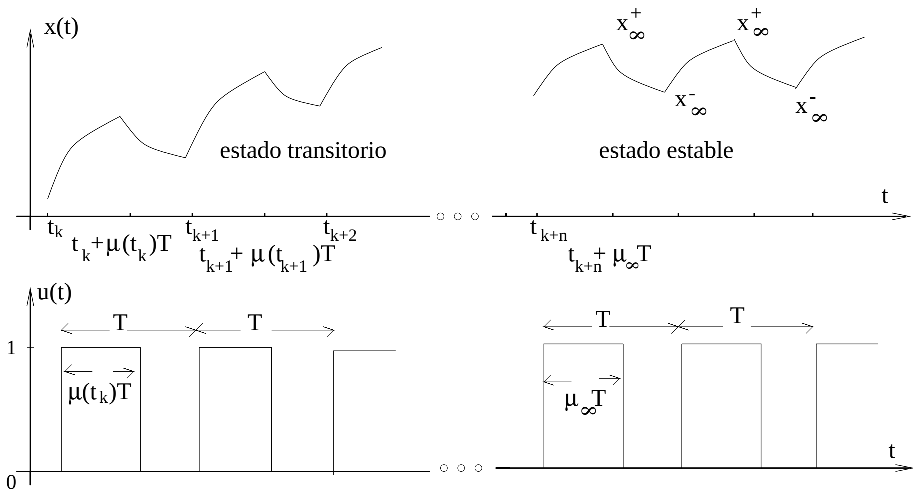

Figura 5.3: Trayectoria del Estado Controlado vía PWM.

El autovalor asociado con la anterior dinámica lineal de estado es, evidentemente, el producto $\Psi_1^{\mu(t_{k+1})}\Psi_1^{1-\mu(t_k)}$. Esta cantidad es estrictamente positiva y menor que la unidad para valores de μ restringidos al intervalo unitario $[0,1]$. La magnitud, en estado estacionario, de la "esquina superior" de la trayectoria de estado, descrito por (5.8), correspondiente a un valor constante μ_∞ de la función de razón de trabajo, está dado por (vea figura 5.3) :

$$x_\infty^+ = \frac{\Psi_2}{1-\Psi_1}\left(1-\Psi_1^{\mu_\infty}\right) \tag{5.9}$$

La relación entre los valores en estado estacionario x_∞^+ y x_∞^- puede obtenerse a partir de (5.7) y (5.9) como:

$$x_\infty^- = x_\infty^+\Psi_1^{1-\mu_\infty} \tag{5.10}$$

Puesto que Ψ_1 es un número positivo estrictamente menor que 1, podemos concluir que $x_\infty^- < x_\infty^+$ para $\mu_\infty \in [0,1]$.

El "rizo" en estado estacionario, denotado por r_∞, puede expresarse de la manera siguiente:

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \frac{\Psi_2}{1-\Psi_1}\left(1-\Psi_1^{\mu_\infty}\right)\left(1-\Psi_1^{1-\mu_\infty}\right) \tag{5.11}$$

Definimos un *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2}r_\infty = \frac{1}{2}\left(x_\infty^- + x_\infty^+\right) \tag{5.12}$$

Usando la expresiones (5.7) y (5.9) en (5.12) obtenemos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Psi_2}{1-\Psi_1}\right)\left(1-\Psi_1^{\mu_\infty}\right)\left(1+\Psi_1^{1-\mu_\infty}\right) \tag{5.13}$$

Procedemos ha escribir el valor, en estado estacionario, de la trayectoria de la corriente de entrada muestreada x_∞^-, en término de la corriente promedio de entrada en estado estacionario $x_{av}(\infty)$. Esta relación nos permite definir una política estabilizante de la razón de trabajo (control) en base al modelo en tiempo discreto del estado muestreado (5.6). Tal política considera apropiadamente el "rizo" asociado a la trayectoria del controlador y conduce asintóticamente la corriente promedio de entrada a un valor pre-especificado deseado en estado estacionario. Para llevar a cabo este objetivo simplemente se elimina el valor en estado estacionario de la razón de trabajo μ_∞ de las expresiones (5.7) y (5.13); encontrando:

$$x_\infty^- = -\Psi_2 \left[\left(\frac{1}{2}(1 - \frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2}) + \frac{\Psi_1}{1-\Psi_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2}\right)^2 + \frac{\Psi_1}{(1-\Psi_1)^2}} \right] \tag{5.14}$$

Política de Control Estabilizante PWM.

El problema de estabilización para el convertidor "buck–derivado" consiste en especificar una política de regulación PWM de la forma (5.2), tal que el valor promedio en estado estacionario de la trayectoria controlada de la corriente de entrada $x(t)$ alcance un valor constante deseado $x_{av}(\infty) = X$.

Entonces, es posible desarrollar una política de regulación retroalimentada estabilizante en base a los estados muestreados del modelo en tiempo discreto (5.6), al forzar a $x(t_k)$ a estabilizarse asintóticamente al valor x_∞^-, correspondiente a X, el cual hemos denotado por $x_\infty^-(X)$ y reescrito como:

$$x_\infty^-(X) = -\Psi_2 \left[\left(\frac{1}{2}(1 - \frac{2X}{\Psi_2}) + \frac{\Psi_1}{1-\Psi_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2X}{\Psi_2}\right)^2 + \frac{\Psi_1}{(1-\Psi_1)^2}} \right] \tag{5.15}$$

Imponemos al sistema muestreado controlado en lazo cerrado un comportamiento lineal y asintóticamente estable, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha\left(x(t_k) - x_\infty^-(X)\right) + x_\infty^-(X) \quad ; \quad |\alpha| < 1 \tag{5.16}$$

Sustituyendo el lado derecho de la expresión (5.6) en (5.16) y resolviendo para la función de razón de trabajo $\mu(t_k)$, obtenemos la siguiente razón de trabajo calculada :

$$\mu_c(t_k) = -\frac{1}{\ln\Psi_1}\ln\left[1 + \frac{(\alpha-\Psi_1)\,x(t_k) + (1-\alpha)\,x_\infty^-(X)}{\Psi_1\Psi_2}\right] \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{5.17}$$

La razón de trabajo $\mu(t_k)$ puede ser fácilmente encontrada a partir de la expresión (5.3). La figura 5.4 expone el esquema de regulación retroalimentado PWM

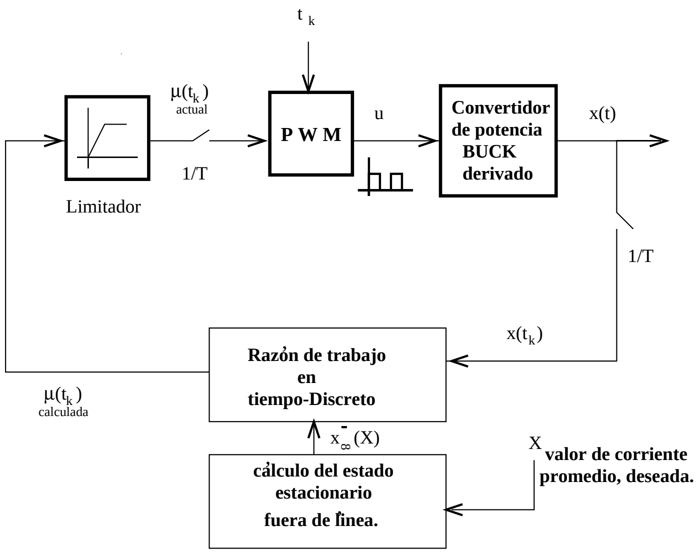

Figura 5.4: Esquema de Regulación para el Convertidor "Buck–Derivado" en Base a una Discretización Exacta.

basado en un modelo dinámico exacto, en tiempo discreto, de la corriente de entrada muestreada.

La expresión (5.17) permite determinar la región de no–saturación de la función de razón de trabajo. Ciertamente, la doble desigualdad $0 < \mu_c < 1$, origina la siguiente región para el estado muestreado:

$$0 < (\alpha - \Psi_1)x(t_k) + (1-\alpha)x_\infty(X) < \Psi_2(1-\Psi_1) \tag{5.18}$$

5.1 Simulación. A fin de comprobar la robustez de la política de regulación PWM previamente propuesta, se efectuaron simulaciones sobre el siguiente modelo perturbado del convertidor "buck–derivado" :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x + \left(\frac{E + \nu(t)}{L}\right)\ u \tag{5.19}$$

donde $\nu(t)$ es una señal de perturbación estocástica que representa un ruido aditivo, no modelado, en la fuente de voltaje. Los valores de los parámetros que definen el convertidor son los siguientes:

$$R = 2.8 \times 10^{-2}\ \ \Omega\ \ ;\ \ L = 1.0 \times 10^{-2}\ \ \mathrm{mH}\ \ ;\ \ E = 126\ \ \mathrm{Volts}$$

El período de muestreo se escogió como $T = 0.125$ ms ($1/T = 8$ KHz) y el valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en $X = 1237$ A. El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado, α, se colocó en 0.3. El valor correspondiente de la corriente de entrada en estado estacionario se encontró como $x_\infty^-(1237) = 1080.7$ A. El valor promedio requerido en estado estacionario de la corriente de entrada así como también las magnitudes x_∞^+ y x_∞^- se mantiene dentro del rango permitido, lo cual nos garantiza que la función de razón de trabajo no se saturará.

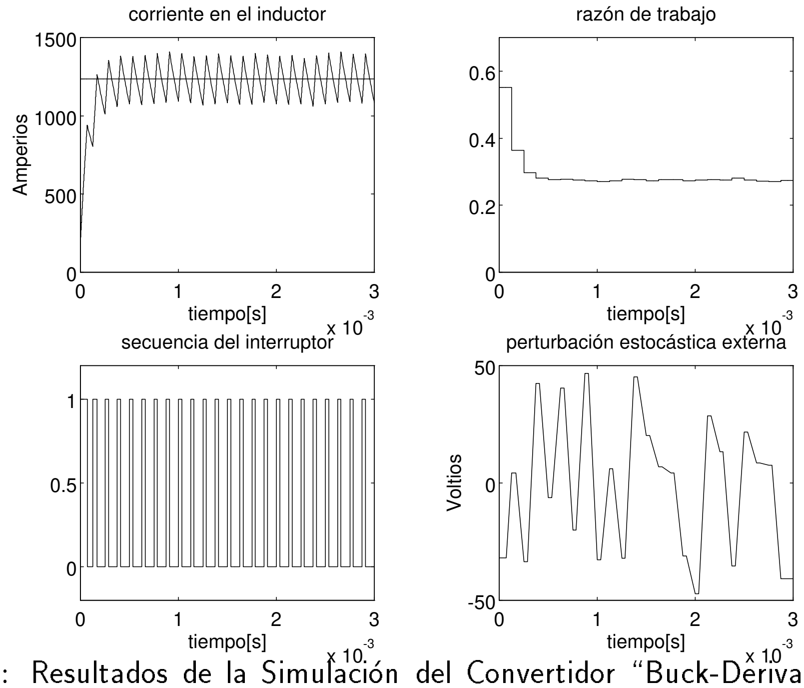

Figura 5.5: Resultados de la Simulación del Convertidor "Buck-Derivado", mediante PWM.

La figura 5.5 muestra la trayectoria de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo $\mu(t)$ y la correspondiente función de posición del interruptor $u(t)$ así como también la señal de perturbación $\nu(t)$. Se puede observar que, ante la influencia de la señal de perturbación no modelada, $\nu(t)$, el controlador no lineal desarrollado funciona considerablemente bien.

□ □ □

Convertidor "Boost–Derivado".

Considere el circuito del convertidor "boost–derivado" que se muestra en la figura 5.6 (vea Rashid [23]).

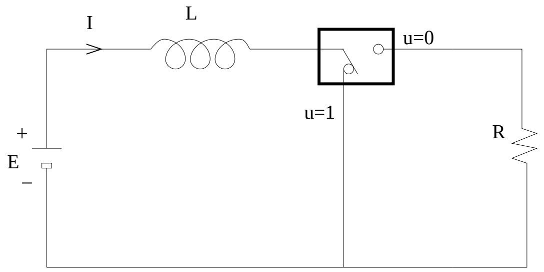

Figura 5.6: Circuito Convertidor "Boost–Derivado".

El modelo, regulado a través de conmutación, que describe el comportamiento de la corriente de entrada, denotada por x, es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x(1-u) + \frac{E}{L} \\ y &= Rx \end{aligned} \tag{5.20}$$

donde y es el voltaje de salida y los parámetros R, L y E vienen dados, respectivamente, por la resistencia de carga , la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable u denota la *función de posición del interruptor* la cual toma valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$.

Una estrategia de regulación, basada en una especificación de la función de posición del interruptor del tipo PWM, puede ser expresada exactamente como en (5.2).

El convertidor "boost–derivado" es popularmente conocido como el convertidor "step–up", debido a que la corriente de entrada es, teóricamente, capaz de tomar cualquier valor dentro del intervalo $[E/R, \infty)$, ésto se puede verificar a partir de las ecuaciones del circuito. El voltaje de salida (positivo) producido por el convertidor no puede ser mayor que el valor E de la fuente de voltaje.

Discretización Exacta

Dado el valor de x sobre el instante de tiempo t_k, denotado por $x(t_k)$, el valor de la corriente de entrada al final del "pulso", de ancho $\mu(t_k)T$, es encontrado, despues de emplear la *formula de Cauchy*, como:

$$x(t_k + \mu(t_k)T) = \theta_2\mu(t_k)T + x(t_k) \tag{5.21}$$

donde, nuevamente, los parámetros θ_1 y θ_2 denotan los cocientes R/L y E/L, respectivamente.

El valor muestreado de la corriente de entrada sobre el final del intervalo de muestreo, luego de algunos cálculos, se puede expresar como:

$$x(t_k + T) = e^{-\theta_1 T(1-\mu(t_k))}\left[\theta_2\mu(t_k)T + x(t_k)\right] + \frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1 - e^{\theta_1 T(1-\mu(t_k))}\right] \tag{5.22}$$

Si denotamos $\Psi_1 = e^{-\theta_1 T}$, $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$ y $\Psi_3 = \theta_2 T$, la dinámica en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrita sobre los instantes de muestreo t_k, está dada por:

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}\left[\mu(t_k)\Psi_3 - \Psi_2\right] + \Psi_2 \tag{5.23}$$

El modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es, como en el caso del convertidor "buck–derivado", no lineal sobre la nueva entrada de control, $\mu(t_k)$.

Note que la cantidad $\Psi_3 = \theta_2 T$ representa, para todos los instantes de tiempo t_k, una cota superior del "rizo" de la corriente de entrada en la bobina, en otra forma, $x(t_k + \mu(t_k)T) - x(t_k) = \theta_2\mu(t_k)T < \theta_2 T$.

El autovalor, variante en el tiempo, asociado con la dinámica de estado muestreado, dado por $\Psi_1^{(1-\mu(t_k))}$, es evidentemente positivo y no mayor que la unidad para todos los valores de μ restringidos al intervalo unitario $[0,1]$. El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por x_∞^-, que corresponde a una función de razón de trabajo constante μ_∞, se obtiene de (5.23) como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\left[\mu_\infty\Psi_3 - \Psi_2\right] + \Psi_2}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \tag{5.24}$$

Ahora podemos referir el valor de x en los instantes $t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T$ y $t_k + \mu(t_k)T$ a fin de obtener la "esquina superior" de la trayectoria en "zig–zag" descrita por la corriente de entrada.

Empleando la *formula de Cauchi* obtenemos:

$$x(t_{k+1}+\mu(t_{k+1})T) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}x(t_k+\mu(t_k)T) + \Psi_3\mu(t_{k+1}) + \Psi_2\left(1 - \Psi_1^{1-\mu(t_k)}\right) \tag{5.25}$$

El autovalor asociado con la anterior dinámica de estado está dado por $\Psi_1^{(1-\mu(t_k))}$. Esta cantidad es estrictamente positiva y menor o igual que la unidad para valores de $\mu(t_k)$ dentro del intervalo $[0,1]$. El valor en estado estacionario de la porción "superior" de la trayectoria de estado, descrita por (5.25), correspondiente a un valor constante μ_∞ de la función de razón de trabajo, viene dado por:

$$x_\infty^+ = \frac{\mu_\infty \Psi_3 + \Psi_2 \left(1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \tag{5.26}$$

Contrariamente al caso del convertidor "buck–derivado", una expresión independiente de μ_∞ que relacione a x_∞^+ y x_∞^-, no se puede conseguir a partir de las ecuaciones (5.24) y (5.26). Este hecho tiene una influencia directa en la imposibilidad de expresar explícitamente el valor promedio, en estado estacionario, de la corriente de entrada, $x_{av}(\infty)$, en términos del valor de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario, x_∞^-.

En base a las ecuaciones (5.24), (5.26) y al hecho que $\Psi_1^{(1-\mu_\infty)} < 1$, se puede confirmar que $x_\infty^- < x_\infty^+$, para $\mu_\infty \in [0, 1]$.

El "rizo" en estado estacionario, denotado por r_∞, puede presentarse en forma similar a (5.11), pero, esta vez, en términos más simples,

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \Psi_3 \mu_\infty \tag{5.27}$$

El *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada es definido, igual que antes, como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2} r_\infty \tag{5.28}$$

Empleando la expresiones (5.24) y (5.27) en (5.28) encontramos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{\left[\Psi_3 \mu_\infty \left(1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right) + 2\Psi_2 \left(1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)\right]}{2\left(1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)} \tag{5.29}$$

Nuevamente, es imposible expresar el valor en estado estacionario de la trayectoria muestreada de la corriente de entrada, x_∞^-, en función de la corriente promedio de entrada $x_{av}(\infty)$. Por lo tanto, debemos proceder a encontrar numéricamente el valor de μ_∞ que corresponde al valor deseado en estado estacionario de la corriente promedio de entrada $X = x_{av}(\infty)$. La función de razón de trabajo requerida en estado estacionario, μ_∞, debe ser sustituida en la expresión de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario (5.24). Este procedimiento, efectuado fuera de línea, conduce al valor requerido en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, $x_\infty^-(X)$, a el cual la dinámica controlada exactamente discretizada (5.23) debe ser conducida, por medio de una prescripción apropiada de la función de razón de trabajo. La política de control encontrada obliga a la corriente promedio de entrada a alcanzar, en estado estacionario, el valor promedio deseado.

Hemos mostrado que la solución requerida, $x_\infty^-(X)$, para la corriente de entrada en estado estacionario, en términos del estado estacionario de la corriente promedio de entrada, $x_{av}(\infty) = X$, siempre existe, para todo μ_∞ en el intervalo $[0,1]$. Además tal solución es única. Ciertamente, manipulando la expresión (5.29) uno obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$\Psi_1^{1-\mu_\infty} = \frac{2X - \Psi_3\mu_\infty - 2\Psi_2}{2X + \Psi_3\mu_\infty - 2\Psi_2} \tag{5.30}$$

Recordemos que tanto Ψ_1 como Ψ_3 son magnitudes positivas, y que $\Psi_1 < 1$. Consideremos ambos lados de la expresión (5.30) como funciones de μ_∞. La gráfica de la función de μ_∞ situada en el lado izquierdo de (5.30) es continuamente creciente con una pendiente no–negativa y toma valores en el intervalo $[\Psi_1, 1]$ cuando μ varía en $[0,1]$. La gráfica de la función de μ_∞ de la parte derecha de (5.30), continuamente decrece con una pendiente estrictamente negativa, cuando μ_∞ varia de 0 a 1, desde el valor 1 hacia la cantidad $M = (2X - \Psi_3 - 2\Psi_2)/(2X + \Psi_3 - 2\Psi_2)$ la cual es, evidentemente, menor que la unidad. Las dos funciones, por lo tanto, se interceptan una sola vez en el intervalo $[0,1]$, y por lo tanto existe una única solución para μ_∞.

Política de Control Estabilizante Implícita PWM.

El problema de estabilización para el convertidor "boost–derivado" consiste en especificar una política de regulación PWM de la forma (5.2), tal que, el valor promedio, en estado estacionario, de la trayectoria controlada de la corriente de entrada $x(t)$ sea igual a un valor constante deseado $x_{av}(\infty) = X$.

Entonces, es posible obtener, en forma implícita, una política de regulación retroalimentada estabilizante a partir del modelo en tiempo discreto (5.23) al forzar $x(t_k)$ a estabilizarse asintóticamente alrededor del valor x_∞^-, correspondiente a X, el cual hemos denotado por $x_\infty^-(X)$.

Imponemos al sistema muestreado controlado en lazo cerrado un comportamiento lineal y asintóticamente estable, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha\left(x(t_k) - x_\infty^-(X)\right) + x_\infty^-(X) \quad ; \quad |\alpha| < 1 \tag{5.31}$$

Sustituyendo el lado derecho de la ecuación (5.23) en (5.31) encontramos la siguiente expresión transcendental, a partir de la cual la función de razón de trabajo calculada puede ser numéricamente obtenida para cada instante de muestreo,

$$\left[\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} - \alpha\right] x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))}\left[\mu_c(t_k)\Psi_3 - \Psi_2\right] + \Psi_2 - (1-\alpha)\, x_\infty^-(X) = 0 \tag{5.32}$$

Reacomodando la ecuación anterior, hallamos la siguiente expresión equivalente para el controlador implícito:

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} = \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \mu_c(t_k)\Psi_3} \tag{5.33}$$

El lado izquierdo de la expresión varía, como función de μ_c, de $\Psi_1 < 1$ a 1, con μ_c variando de 0 a 1. Para un valor dado de $x(t_k)$, el lado derecho de (5.33) toma valores, como función de μ_c, en el intervalo:

$$\left[\frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2}, \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3}\right] \tag{5.34}$$

Es fácil ver que una condición necesaria y suficiente para la existencia de un punto de intersección de las gráficas de las funciones, en el intervalo $[0,1]$, está dada por la condición:

$$\frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3} < 1 \tag{5.35}$$

la cual es equivalente a :

$$x_\infty^-(X) < x(t_k) + \frac{\Psi_3}{1-\alpha} \tag{5.36}$$

Nótese que en estado estacionario, cuando $x(t_k) = x_\infty^-(X)$ la condición (5.36) es trivialmente satisfecha, debido a la positividad de Ψ_3 y al hecho de que $|\alpha| < 1$. El controlador implícito (5.33) conduce entonces a una solución única de la razón de trabajo μ_∞, la cual se encuentra en el intervalo $[0,1]$. No obstante, durante la etapa transitoria, la condición (5.36) simplemente dice que el valor deseado en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, $x_\infty^-(X)$, no debe exceder la corriente de entrada muestreada, sobre cualquier instante de tiempo, más el valor superior de todo el "rizo" de la corriente de entrada (dado por $\Psi_3 = \theta_2 T$), multiplicado por un factor de $1/(1-\alpha)$. Como se puede ver, ésta no es una condición muy restrictiva, especialmente si se escoge a α positiva y no muy cercana a cero. Observe, además, que en ausencia de la condición (5.36), el controlador implícito (5.33) *siempre* arroja una solución única para $\mu_c(t_k)$ la cual no está, necesariamente, restringida al intervalo $[0,1]$.

La función de razón de trabajo puede ser encontrada a partir de la función de razón de trabajo calculada mediante el uso de la expresión (5.3).

La figura 5.7 muestra el esquema de regulación retroalimentado PWM para el convertidor "boost–derivado" basado en un modelo exacto en tiempo discreto de la corriente de entrada muestreada y el sintetizador implícito de la razón de trabajo.

Observación : Controladores implícitos de la forma (5.33) demandan una solución numérica en línea de la ecuación transcendental correspondiente a la función de razón de trabajo calculada $\mu_c(t_k)$, una vez que el estado muestreado, $x(t_k)$, está disponible. El tiempo de cálculo requerido sobre cada instante de muestreo puede ser bastante significativo y de esta forma un retardo importante se introduce en la implantación

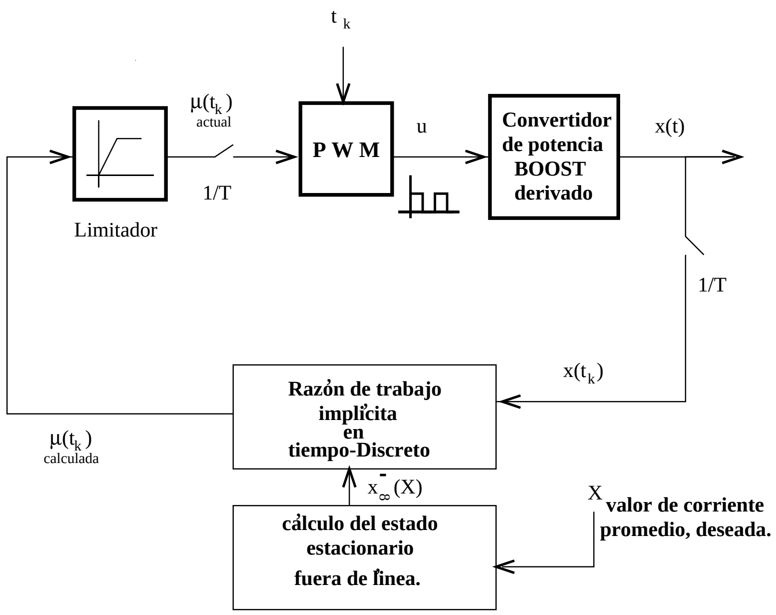

Figura 5.7: Esquema de Regulación Mediante PWM para el Convertidor "Boost–Derivado", en base a una Discretización Exacta.

de la ley de control. En las consideraciones y simulaciones llevadas a cabo en el resto de este capítulo tal retardo no es tomado en consideración y hemos asumido, por lo tanto, que uno puede determinar "casi instantaneamente" la función de razón de trabajo a partir de la expresión del controlador. Esta asunción es justificada en base a los avances significativos en los dispositivos eléctronicos análogos y a la disponibilidad de rápidos coprocesadores matemáticos.

5.2 Simulación. A fin de probar la robustez de la política de regulación PWM previamente derivada, basada en una discretización exacta, hemos empleado el siguiente modelo perturbado del convertidor "boost–derivado" :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x + \left(\frac{E+\nu(t)}{L}\right) \tag{5.37}$$

donde $\nu(t)$ representa una entrada de perturbación estocástica externa que afecta directamente el comportamiento del sistema a través del valor de la fuente de voltaje. Los valores de los parámetros que definen el convertidor fueron selecionados en forma idéntica a aquellos considerados en el caso del convertidor "buck–derivado":

$$R = 2.8 \times 10^{-2} \;\; \Omega \;\; ; \;\; L = 1.0 \times 10^{-2} \;\; \text{mH} \;\; ; \;\; E = 126 \;\; \text{Volts}$$

El período de muestreo se escogió como $T = 0.125$ ms ($1/T = 8$ KHz) y el valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en $X = 6000$ A. El autovalor de la

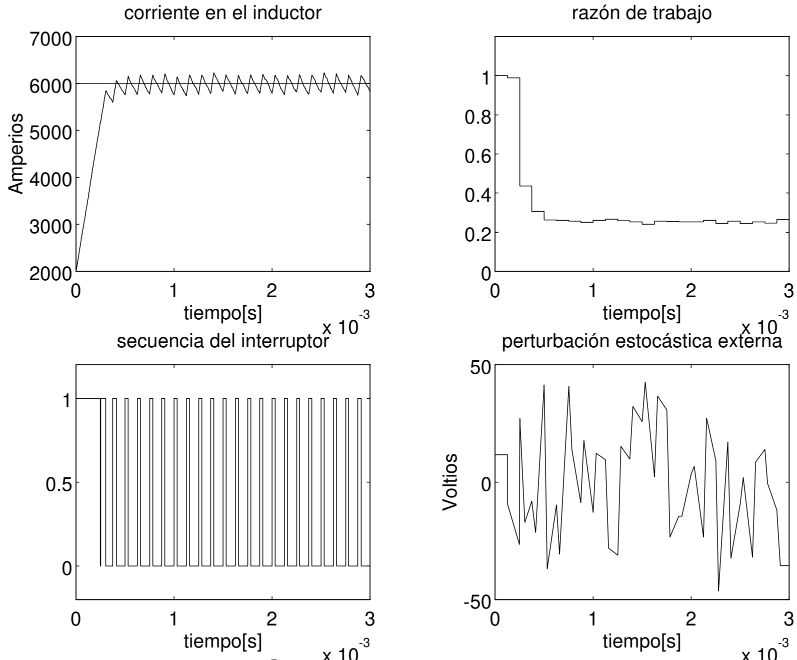

Figura 5.8: Resultados de la Simulación para la Estabilización mediante PWM, del Convertidor "Boost–Derivado".

dinámica lineal en lazo cerrado, α, se colocó en 0.3. El valor correspondiente de la corriente de entrada en estado estacionario se encontró como $x_{\infty}^{-}(6000) = 5804$ A. El valor promedio requerido en estado estacionario de la corriente de entrada así como también las magnitudes x_{∞}^{+} y x_{∞}^{-} se encuentran dentro del rango permitido lo cual nos garantiza que la función de razón de trabajo no se saturará.

La trayectoria controlada de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo, la función de posición del interruptor $u(t)$ y la señal de perturbación $\nu(t)$ se exponen en la figura 5.8, donde se puede observar el funcionamiento adecuado del controlador y su robustez con respecto a la señal de perturbación no modelada.
□ □ □

Circuito "Buck–Boost–Derivado".

Considere el circuito del convertidor "buck–boost–derivado" que se expone en la figura 5.9 (vea Rashid [23]).

A continuación sintetizaremos todas las ecuaciones relevantes que conducen al diseño del controlador PWM estabilizante para el convertidor "buck–boost–derivado". La obtención de la función de razón de trabajo requerida está basada en un valor deseado de la corriente promedio de entrada X.

El modelo regulado mediante conmutación del convertidor "buck–boost–

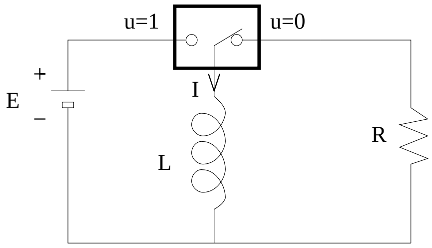

Figura 5.9: Circuito del Convertidor "Buck–Boost–Derivado".

derivado".

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}(1-u)x - \frac{E}{L}\,u \\ &= -\theta_1(1-u)x - \theta_2 u \end{aligned} \tag{5.38}$$

Estrategia de regulación PWM para la posición del interruptor.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{para} \quad t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \tag{5.39}$$
$$t_{k+1} = t_k + T \ ; \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

El convertidor "buck–boost–derivado" es popularmente conocido como el convertidor "step–up–down", debido al hecho que la corriente promedio de entrada es, teoricamente, capaz de alcanzar todos los valores entre 0 y $-\infty$.

Discretización exacta de la dinámica regulada PWM del convertidor "buck–boost–derivado".

$$x(t_k + \mu(t_k)T) = -\theta_2\mu(t_k)T + x(t_k) \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned} x(t_k + T) &= e^{-\theta_1 T(1-\mu(t_k))}\left[-\theta_2\mu(t_k)T + x(t_k)\right] \\ &= \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}x(t_k) - \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}\Psi_3\mu(t_k) \end{aligned} \tag{5.41}$$

Valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada.

$$x_\infty^- = -\frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\mu_\infty\Psi_3}{1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \tag{5.42}$$

Dinámicas en tiempo discreto de las "esquinas superiores" de la trayectoria de la corriente de entrada.

$$x(t_{k+1}+\mu(t_{k+1})T) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}x(t_k+\mu(t_k)T) - \Psi_3\mu(t_{k+1}) \tag{5.43}$$

Valor en estado estacionario de las "esquinas superiores" de la trayectoria de la corriente de entrada.

$$x_\infty^+ = -\frac{\mu_\infty\Psi_3}{1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \tag{5.44}$$

Valor del "rizo" en estado estacionario.

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = -\Psi_3\mu_\infty \tag{5.45}$$

Valor promedio en estado estacionario de la trayectoria de la corriente de entrada.

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2}r_\infty = -\frac{\left[\Psi_3\mu_\infty\left(1+\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)\right]}{2\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)} \tag{5.46}$$

Note que $2X_{av} < -\Psi_3\mu_\infty$.

Existencia de una función de razón de trabajo para un valor deseado de la corriente promedio de entrada en estado estacionario.

$$\Psi_1^{(1-\mu_\infty)} = \frac{2X_{av}(\infty)+\Psi_3\mu_\infty}{2X_{av}(\infty)-\Psi_3\mu_\infty} \tag{5.47}$$

Una solución para μ_∞ siempre existe en $[0,1]$ a partir del hecho que $X_{av}(\infty) < 0$ y $\Psi_3 > 0$. Ciertamente, en el intervalo $[0,1]$, el lado izquierdo de (5.47) varía desde $\Psi_1 < 1$ a 1, mientras el lado derecho varía de 1 a la cantidad definida por, $(2X_{av}(\infty)+\Psi_3)/(2X_{av}(\infty)-\Psi_3)$, lo cual es menor que 1, pudiendo aún ser negativo, por virtud del hecho que $|2X_{av}(\infty)-\Psi_3| > |2X_{av}(\infty)+\Psi_3|$.

Dinámica deseada en lazo cerrado (asintóticamente estable).

$$x(t_{k+1}) = \alpha\left(x(t_k) - x_\infty^-(X)\right) + x_\infty^-(X) \;\; ; \;\; |\alpha| < 1 \tag{5.48}$$

Sintetizador implícito de la razón de trabajo.

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} = \frac{\alpha x(t_k) + (1-\alpha)\,x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_3\mu_c(t_k)} \tag{5.49}$$

Dado $x(t_k)$, existe una solución para $\mu_c(t_k)$, en el intervalo $[0,1]$ sí, y solo sí, la siguiente condición se mantiene:

$$x_\infty^-(X) < x(t_k) - \frac{\Psi_3}{1-\alpha} \tag{5.50}$$

la cual se puede interpretar en forma similar a (5.36) y es trivialmente satisfecha en estado estacionario.

5.3 Simulación. Simulaciones digitales fueron desarrolladas a partir del siguiente modelo perturbado del convertidor "buck–boost–derivado" conjuntamente con el sintetizador de la razón de trabajo propuesto,

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x - \left(\frac{E+\nu(t)}{L}\right) u \tag{5.51}$$

El esquema de control retroalimentado coincide, enteramente, con el que se muestra en la figura 5.7 del convertidor "boost–derivado", con la única excepción de que la planta está ahora constituida por el convertidor de potencia "buck–boost–derivado".

Los valores de los parámetros del convertidor, del período de muestreo y del autovalor para la dinámica deseada en lazo cerrado, fueron tomados igual que en el caso previo. El valor deseado en estado estacionario para la corriente promedio de entrada se colocó en -1500 A. El valor correspondiente a la corriente de entrada muestreada en estado estacionario se encontró como $x_\infty^-(-1500) = -1304$ A. En la figura 5.10 se muestran los resultados obtenidos.

□ □ □

A lo largo de este capítulo hemos observado que, la linealidad en la entrada, asociada con el tradicional modelo promedio de frecuencia infinita, es efectivamente destruida por el procedimiento de discretización exacta, no obstante, el modelo resultante aún permanece lineal en el estado. En los problemas de estabilización, excepto para el convertidor "buck–derivado", se obtiene un sintetizador de la razón de trabajo no lineal, discreto, del tipo *implícito*, es decir, sobre cada instante de muestreo, la función de razón de trabajo es dada por la solución numérica de una ecuación transcendental. Similares ecuaciones transcendentales surgen del cálculo fuera de línea de la corriente promedio de entrada deseada, en estado estacionario, en términos de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario. Solo para el convertidor "buck–derivado" es posible obtener una expresión explícita que relaciona la corriente promedio de entrada con los valores muestreados de la corriente de entrada.

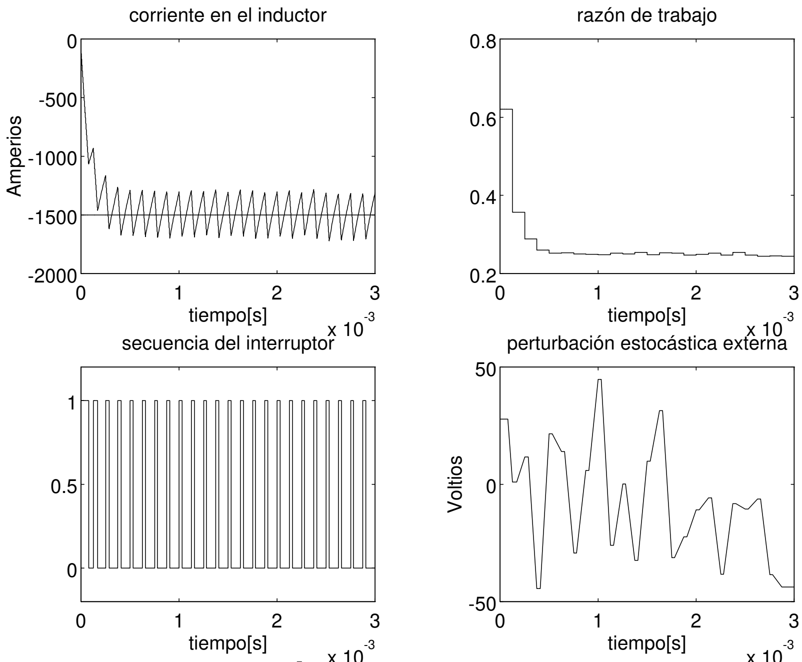

Figura 5.10: Resultados de la Simulación para la Estabilizació mediante PWM del Convertidor "Buck–Boost–Derivado".

5.2 Controladores vía Modulación de Frecuencia de Pulsos.

La Modulación de Anchura de Pulso (PWM) constituye una estrategia de control frecuentemente empleada en la regulación de convertidores de potencia DC–DC (vea Severns y Bloom [25], Kassakian *et al* [12], y los trabajos de Sira–Ramírez y sus colaboradores [28] [32]), ella puede ser derivada tanto por el uso de los *modelos de estado promedio*, inicialmente propuesto por Cúk [4] y Middlebrook y Cúk [18], y posteriormente justificados desde un punto de vista geométrico por Sira–Ramírez en [27], o por la creación de modos deslizantes en el espacio de estado (vea [40] y Sira–Ramírez y Ilic–Spong [30] and [26], [35]). Las estrategias PWM, en tanto que son relativamente fáciles de implementar por medio de circuitos eléctronicos integrados, presentan la desventaja de emplear un período de muestreo fijo, en vez de variable. Este hecho está asociado a dos resultados importantes:

1. La actividad de muestreo es innecesariamente rápida cuando tiene inicio el proceso en el convertidor, mientras el error es significativamente grande.

2. Imposibilidad de incrementar la frecuencia de muestreo, durante el estado estacionario de la regulación, impidiendo el beneficio de reducir el "rizo" durante esa etapa.

Es obvio que si la frecuencia de muestreo pudiese expresarse en función del error de estabilización entonces, los dos problemas anteriores serian fácilmente superados.

El control mediante Modulación de Frecuencia de Pulso (PFM) constituye una generalización del esquema de control a través de Modulación de Anchura de Pulso, en el cual se admite que la frecuencia de muestreo actúe como una función del error de estabilización. Como resultado, una frecuencia de muestreo baja puede ser empleada durante el tiempo en el cual el trasiente exhibe un error de estabilización grande mientras, que en estado estacionario, debido a las posibilidades de usar frecuencias de muestreo altas, se puede lograr un "rizo" apropiado (reducido). El control de convertidores de potencia DC–DC a través de PFM ha sido, relativamente, poco tratado en la literatura especializada. Investigaciones pioneras sobre el control de plantas lineales con PFM son aquellas de Skoog and Blankenship [38]. En los ultimos años, el tópico del control PFM, y sus ventajas, ha permanecido en el olvido, excepto por algunas contribuciones hechas por Sira–Ramírez y sus colaboradores [33] y [11].

En este capítulo trataremos de investigar que tan viable resulta el hecho de diseñar controladores PFM para la estabilización de la corriente de entrada en los, ya conocidos, *convertidores de potencia DC–DC derivados.* Esta clase de convertidores son bastante común en soldadura de alta presición y en otras aplicaciones industriales (vea Rashid [23]). Como hemos visto en los capítulos anteriores, los convertidores derivados constituyen una versión simplificada de los convertidores de potencia DC–DC tradicionales, tales como el "buck", el "boost" y el "buck–boost", en los cuales el se ha removido el capacitor. Así, los convertidores derivados exhiben una dinámica escalar lo cual los convierte en particularmente convenientes para el diseño de políticas de control discontínuas basadas en esquemas de *discretización exacta*, en lugar de las cuestionables aproximaciones promedios (vea Sira-Ramírez *et al* [29] para el esquema en tiempo discreto regulado mediante PWM).

Convertidor "Buck–Derivado".

Consideremos el modelo, regulado mediante conmutación, que describe el comportamiento del convertidor "buck–derivado",

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x + \frac{E}{L}u \\ y &= Rx \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde x es la corriente de entrada, y es el voltaje de salida y los parámetros R, L y E representan, la resistencia de carga , la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable u denota la *función de posición del interruptor*, y ésta toma valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$.

Una estrategia de regulación basada en una especificación del tipo PFM de la posición del conmutador, puede ser descrita (vea Sira–Ramírez [11]) por :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T(t_k) \\ 0 & \text{para} \quad t_k + \mu(t_k)T(t_k) \leq t < t_k + T(t_k) \end{cases} \tag{5.2}$$
$$t_{k+1} = t_k + T(t_k) \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\mu(\cdot)$ es conocida como la *función de razón de trabajo*, adoptando valores en el intervalo cerrado $[0,1]$ de la recta real. $T(\cdot)$ es el período de muestreo variable, denominado *función del ciclo de trabajo*, y la cual será especificada como una función dependiente del error de estabilización asociado con la corriente de entrada x, y t_k es el instante de muestreo. El comportamiento típico de un interruptor controlado por una estrategia PFM, se muestra en la figura 5.11.

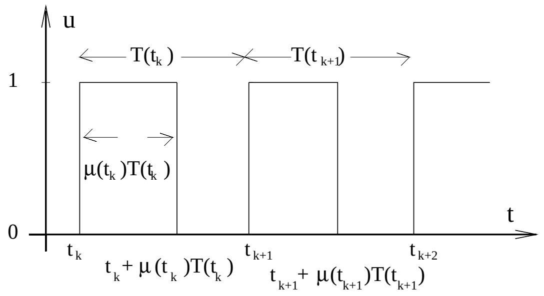

Figura 5.11: Función de Posición del Interruptor Mediante una Política PFM.

Puesto que la razón de trabajo μ es determinada en línea de un modo retroalimentado, es decir, calculada como una función explícita dependiente del valor muestreado de la coriente de entrada $x(t_k)$ sobre cada instante t_k, podemos obtener valores de μ fuera del intervalo $[0,1]$. En consecuencia, es necesario distinguir entre la *función de razón de trabajo calculada*, denotada por $\mu_c(\cdot)$ y la *función de razón de trabajo* $\mu(\cdot)$, siendo ésta última la limitación de $\mu_c(\cdot)$ al intervalo cerrado $[0,1]$. De una manera más formal :

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu_c(t) > 1 \\ \mu_c(t) & \text{para } 0 \leq \mu_c(t) \leq 1 \\ 0 & \text{para } \mu_c(t) < 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Discretización Exacta.

El estudio de las diferentes topologías del circuito que constituye el convertidor "buck–derivado" (5.1), asociadas con cada cada una de las dos posibles posiciones del interruptor, nos conduce a desarrollar un modelo *exacto* en tiempo discreto que describe la evolución del valor muestreado de la corriente de entrada en el convertidor, cuando éste se encuentra sujeto a una política de conmutación de la forma (5.2).

Para el caso $u = 1$, dado el valor de x en el instante t_k, denotado por $x(t_k)$, el valor de la corriente de entrada sobre el final del "pulso", de ancho $\mu(t_k)T(t_k)$, es encontrado despues de emplear la *formula de Cauchy* como :

$$x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) = e^{-\theta_1 \mu(t_k)T(t_k)}x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1 - e^{-\theta_1 \mu(t_k)T(t_k)}\right] \tag{5.4}$$

donde los parámetros θ_1 y θ_2 denotan los cocientes R/L y E/L, respectivamente.

Para $u = 0$, tomando como condición inicial el valor de x en el instante de tiempo $t_k + \mu(t_k)T(t_k)$ (5.4) y aplicando nuevamente la *formula de Cauchy*, el valor muestreado de la corriente de entrada sobre el final del período de muestreo se obtiene como:

$$x(t_k + T(t_k)) = e^{-\theta_1 T(t_k)}x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1}e^{-\theta_1 T(t_k)}\left[e^{\theta_1 \mu(t_k)T(t_k)} - 1\right] \tag{5.5}$$

Si denotamos $\Psi_1 = e^{-\theta_1 T}$ y $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$, el modelo en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrito sobre los instantes de muestreo, está dado por :

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1^{T(t_k)}x(t_k) + \Psi_1^{T(t_k)}\Psi_2\left[\Psi_1^{-\mu(t_k)T(t_k)} - 1\right] \tag{5.6}$$

donde el valor de la función de razón de trabajo sobre el instante t_k, $\mu(t_k)$, y el período de muestreo $T(t_k)$ se comportan como "entradas de control" las cuales deben ser especificadas en el inicio de cada período de muestreo. El modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es, por lo tanto, no lineal en las nuevas entrada de control, $\mu(t_k)$ y $T(t_k)$. La función de razón de trabajo, como explicamos anteriormente, se encuentra restringida al intervalo $[0, 1]$. Uno puede también acotar la función del ciclo de trabajo a un intervalo de la forma $[T_{\min}, T_{\max}]$ de la recta real. $T_{\min}$ es el menor período de muestreo correspondiente a la frecuencia de muestreo más alta permisible, mientras $T_{\max}$ es el mayor período de muestreo asociado a la frecuencia de muestreo más baja.

El único auto valor asociado con la dinámica lineal muestreada, está dado por $\Psi_1^{T(t_k)}$, el cual es evidentemente positivo y estrictamente menor que la unidad puesto que el período de muestreo $T(t_k)$ es positivo para todo instante de muestreo. El sistema muestreado es por ende asintóticamente estable para valores constantes de la función de razón de trabajo μ y del período de muestreo T. Hemos asumido, sin perdida de generalidad, que la corriente de entrada controlada alcanza el estado estacionario cuando la mayor frecuencia de muestreo $1/T_{\min}$ es empleada en el esquema PFM (5.2). Bajo condiciones de operación de estado estacionario la función de razón de trabajo, evidentemente, debe ser considerada como un valor constante, digamos, μ_∞.

El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por x_∞^-, correspondiente a un valor constante de la función de razón de trabajo, μ_∞, y a la mayor frecuencia de muestreo $1/T_{\min}$ se obtiene fácilmente a partir de (5.6) como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1^{T_{\min}}\Psi_2}{1-\Psi_1^{T_{\min}}}\left(\Psi_1^{-\mu_\infty T_{\min}} - 1\right) \tag{5.7}$$

Tal como vimos en el sección anterior, una estrategia de regulación mediante conmutación impone sobre el estado controlado una trayectoria en “zig–zag”, debido a las discontinuidades asociadas con la variable de entrada u, que define la posición del interruptor (vea figura 5.12).

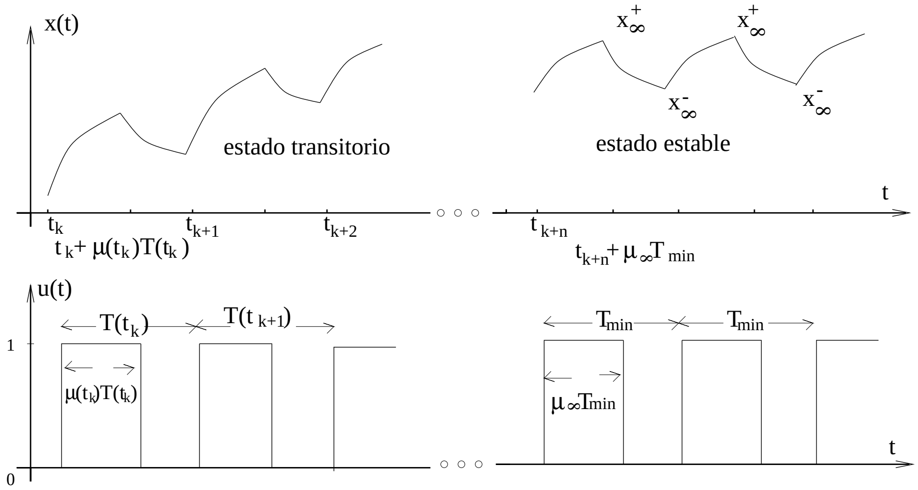

Figura 5.12: Trayectoria del Estado Controlado vía PFM

El indice superior “$-$” en (5.7) refiere a la posición “baja” de la trayectoria en “zig-zag” parcialmente descrita por (5.6). Resulta claro que a fin de desarrollar una política de regulación adecuada para la especificación de la razón de trabajo $\mu(t_k)$, es impresindible tomar en cuenta el “rizo”, inevitablemente asociado con la evolución de $x(t_k)$, el cual no es considerado por el modelo (5.5). No solo se deben analizar los valores del estado muestreado $x(t_k)$, sino también los valores de $x(t)$ en los instantes $t = t_k + \mu(t_k)T(t_k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$; (vea figura 5.12).

Ahora, referimos el valor de x sobre los instantes de tiempo $t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_{k+1})$ y $t_k + \mu(t_k)T(t_k)$ a fin de obtener el valor de la “esquina superior” de la trayectoria en “zig-zag” de la corriente de entrada.

Usando la *formula de Cauchy* obtenemos :

$$\begin{aligned} x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_k)) &= \Psi_1^{\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})}\Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) + \\ &+ \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

El autovalor asociado con la anterior dinámica lineal de estado es el producto

$$\Psi_1^{\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})}\Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}$$

el cual es positivo y menor que la unidad para valores de μ restringidos al intervalo unitario $[0,1]$. La magnitud, en estado estacionario, de la "esquina superior" de la trayectoria de estado, descrita por (5.8), correspondiente a valores constantes de la función de razón de trabajo y período de muestreo, dados respectivamente por μ_∞ y $T_{\min}$ (vea figura 5.12), es :

$$x_\infty^+ = \frac{\Psi_2}{1-\Psi_1^{T_{\min}}}\left(1-\Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}\right) \tag{5.9}$$

Relacionando las ecuaciones (5.7) y (5.9) se puede ver que:

$$x_\infty^- = x_\infty^+ \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} \tag{5.10}$$

Ya que Ψ_1 es un número positivo estrictamente menor que 1, podemos concluir que $x_\infty^- < x_\infty^+$ para $\mu_\infty \in [0,1]$ y cualquier valor del período mínimo de muestreo $T_{\min}$.

El "rizo" en estado estacionario, denotado por r_∞, se obtiene como:

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \frac{\Psi_2}{1-\Psi_1^{\mathrm{T}_{\min}}}\left(1-\Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}\right)\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right) \tag{5.11}$$

Podemos definir un *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada en el inductor como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2}r_\infty = \frac{1}{2}\left(x_\infty^- + x_\infty^+\right) \tag{5.12}$$

Empleando las expresiónes (5.7) y (5.9) en la ecuación anterior, obtenemos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Psi_2}{1-\Psi_1}\right)\left(1-\Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}\right)\left(1+\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right) \tag{5.13}$$

Procedemos ha exponer el valor, en estado estacionario, de la trayectoria de la corriente de entrada muestreada x_∞^-, en término de la corriente promedio de entrada en estado estacionario $x_{av}(\infty)$. Esta relación nos permite definir una política estabilizante factible de la razón de trabajo (control) en base al modelo en tiempo discreto del estado muestreado (5.5). La política retroalimentada considera apropiadamente el "rizo" asociado a la trayectoria del controlador y conduce asintóticamente la corriente promedio de entrada a un pre-especificado valor deseado en estado estacionario. Para llevar a cabo este objetivo simplemente se elimina el valor en estado estacionario de la razón de trabajo μ_∞ de las expresiones (5.6) y (5.13); encontrandose:

$$x_\infty^- = -\Psi_2\left[\left(\frac{1}{2}(1-\frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2}) + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{1-\Psi_1^{T_{\min}}}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2}\right)^2 + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{(1-\Psi_1)^2}}\,\right] \tag{5.14}$$

Una Política de Control PFM.

Observese que a partir de la ecuación (5.14) se puede obtener de manera inmediata el valor de x_∞^- correspondiente a un valor promedio constante X de la corriente en el inductor, denotado por $x_\infty^-(X)$,

$$x_\infty^-(X) = -\Psi_2 \left[\left(\frac{1}{2}(1 - \frac{2X}{\Psi_2}) + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{1 - \Psi_1^{T_{\min}}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2X}{\Psi_2}\right)^2 + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{(1-\Psi_1)^2}} \right] \tag{5.15}$$

Una ley de control por realimentación $\mu(t_k)$ para la estabilización puede obtenerse explícitamente a partir del modelo exacto en tiempo discreto (5.6), forzando a $x(t_k)$ a estabilizarse asintóticamente alrededor de $x_\infty^-(X)$.

Imponemos al sistema muestreado, controlado en lazo cerrado, un comportamiento lineal y asintóticamente estable, basado en la dinámica del error, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha \left(x(t_k) - x_\infty^-(X) \right) + x_\infty^-(X) \quad ; \quad |\alpha| \; < \; 1 \tag{5.16}$$

el cual nos garantiza que el error se estabiliza asintóticamente a cero.

Resulta claro que a objeto de imponer la dinámica lineal deseada (5.16) sobre el sistema en lazo cerrado, uno cuenta con dos entradas de control $\mu(t_k)$ y $T(t_k)$. Actualmente uno obtiene, despues de sustituir el lado derecho de la expresión (5.5) en (5.16), una ecuación escalar la cual cuenta con las dos funciones desconocidas. Por esta razón debemos proceder a especificar una de las dos entradas de control, digamos $T(t_k)$, ya sea como una constante fija $T(t_k) = T$ (lo cual reduce el esquema de control a un PWM), o como una función retroalimentada $T(t_k) = T(x(t_k))$. Entonces resolvemos la función de razón de trabajo $\mu(t_k)$ en términos del período de muestreo y obtenemos la siguiente razón de trabajo calculada en función de los parámetros del sistema y del intervalo de muestreo actual, $T(t_k)$,

$$\begin{aligned} \mu_c(t_k) &= -\frac{1}{T(t_k)\ln\Psi_1}\ln\left[1 + \frac{\left(\alpha - \Psi_1^{T(t_k)}\right) x(t_k) + (1-\alpha)\, x_\infty^-(X)}{\Psi_1\Psi_2}\right] \quad ; \\ k &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.17}$$

La razón de trabajo $\mu(t_k)$ puede ser fácilmente encontrada a partir de la expresión (5.4). La figura 5.13 expone el esquema de regulación retroalimentado PFM en base a un modelo dinámico exacto, en tiempo discreto, de la corriente de entrada muestreada.

Una escogencia razonable del período de muestreo $T(t_k)$ es en función del error de estabilización $e(t_k) = x(t_k) - X$, tal como:

$$T(t_k) = \begin{cases} T_{\max} & \text{para } |e(t_k)| > \frac{1}{\rho_2} \\ T_{\min} + (T_{\max} - T_{\min}) \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \left(e(t_k) - \frac{1}{\rho_1} \right) & \text{para } \frac{1}{\rho_1} \leq |e(t_k)| \leq \frac{1}{\rho_2} \\ T_{\min} & \text{para } |e(t_k)| < \frac{1}{\rho_1} \end{cases} \tag{5.18}$$

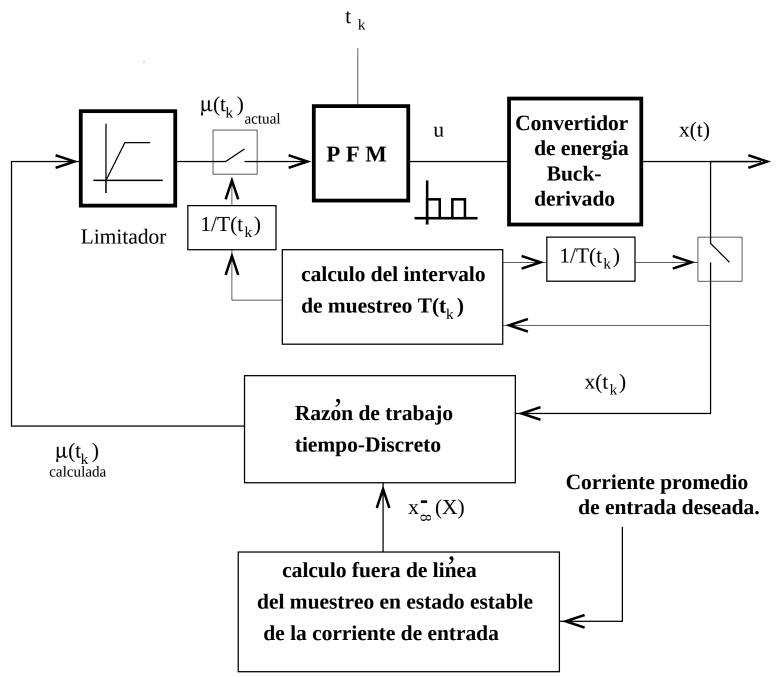

Figura 5.13: Esquema de Regulación para el Convertidor "Buck–Derivado" en Base a una Discretización Exacta PFM.

En otras palabras el Período de muestreo también conocido como *el ciclo de trabajo* se especifica como una función retroalimentada del error de estabilización, $e(t_k)$, con valores constantes de saturación $T_{\max}$, y $T_{\min}$, que corrresponden, respectivamente, con valores pequeños y grandes del error de estabilización. Para valores intermedios de tal error el periodo de muestreo varía de una manera proporcional a la magnitud del mismo. Las constantes ρ_1 y ρ_2 son constantes de diseño que determinan para que valores del error se lleva a cabo la saturación asi como la pendiente de la porción lineal de la función (vea Figura 5.14).

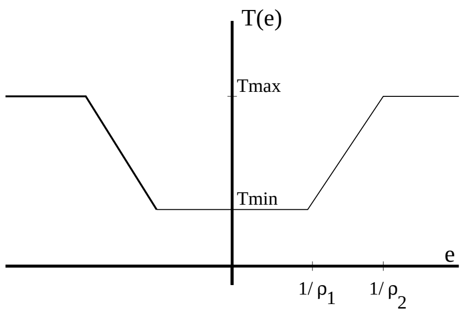

Figura 5.14: Política de Control, Ciclo de Trabajo.

La expresión (5.17) permite la determinación de la región de no–saturación de la función de razón de trabajo. Ciertamente, la doble desigualdad $0 < \mu_c < 1$, origina la siguiente región para el estado muestreado:

$$0 < (\alpha - \Psi_1^{T(t_k)})x(t_k) + (1-\alpha)x_\infty(X) < \Psi_2\left(1 - \Psi_1^{T(t_k)}\right) \tag{5.19}$$

5.1 Simulación. Para probar la validez de la ley de regulación PFM en base a una discretización exacta, propuesta anteriormente, se empleó el siguiente modelo perturbado del convertidor "buck–derivado" :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x + \left(\frac{E+\nu(t)}{L}\right)\ u \tag{5.20}$$

donde $\nu(t)$ es una señal de perturbación estocástica generada por el computador que representa un ruido aditivo, no modelado, en la fuente de voltaje.

Para efectuar la simulación, se asignaron los siguiente valores de los parámetros:

$$R = 2.8\times10^{-2}\ \ \Omega\ \ ;\ \ L = 1.0\times10^{-2}\ \ \mathrm{mH}\ \ ;\ \ E = 126\ \ \mathrm{Volts}$$

Los valores de satuaración de la función del ciclo de trabajo se escogieron de $T_{\min} = 0.0833$ ms ($1/T_{\min} = 12$ KHz) y $T_{\max} = 0.250$ ms ($1/T_{\max} = 4$ KHz). El valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en $X = 1237$ A. El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado, α, se fijó en 0.3. Se encontró que $x_\infty^-(1237) = 1080.7$ A.

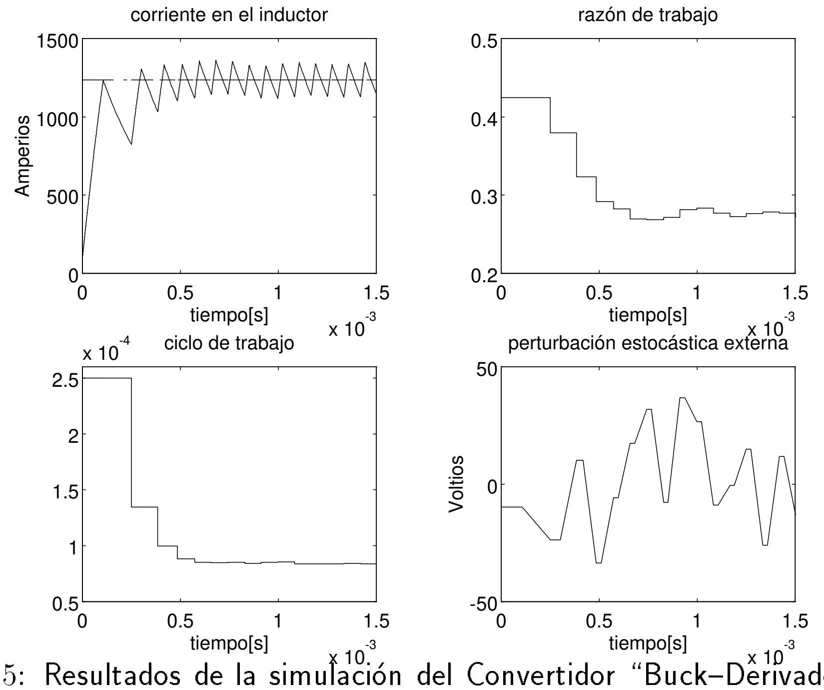

Figura 5.15: Resultados de la simulación del Convertidor "Buck–Derivado", mediante PFM.

La figura 5.15 muestra la trayectoria de la corriente de entrada, la funciones de razón de trabajo $\mu(t)$ y de ciclo de trabajo $T(t)$ así como también la señal de perturbación $\nu(t)$.

Como se puede ver, apesar de la señal de perturbación, el controlador diseñado actúa de una forma bastante satisfactoria.

Convertidor "Boost–Derivado".

El modelo, regulado a través de conmutación, que describe el comportamiento de la corriente de entrada, denotada por x, para el caso del convertidor "boost–derivado" es :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x(1-u) + \frac{E}{L} \\ y &= Rx \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde y es el voltaje de salida y los parámetros R, L y E vienen dados, respectivamente, por la resistencia de carga , la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable u denota la *función de posición del interruptor* tomando valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$.

Una estrategia de regulación, basada en una especificación de la función de posición del interruptor del tipo PFM, puede ser descrita exactamente como en (5.2).

Discretización Exacta

Dado el valor de x sobre el instante de tiempo t_k, denotado por $x(t_k)$, el valor de la corriente de entrada al final del "pulso", de ancho $\mu(t_k)T(t_k)$, es encontrado, despues de emplear la *formula de Cauchy*, como:

$$x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) = \theta_2\mu(t_k)T(t_k) + x(t_k) \tag{5.22}$$

donde, nuevamente, los parámetros θ_1 y θ_2 denotan los cocientes R/L y E/L, respectivamente.

Tomando como condición inicial el valor de x en el instante $t_k + \mu(t_k)T(t_k)$ (5.22) y aplicando nuevamente la *formula de Cauchy*, el valor muestreado de la corriente de entrada sobre el final del período de muestreo se obtiene como:

$$x(t_k + T(t_k)) = e^{-\theta_1 T(t_k)(1-\mu(t_k))}\left[\theta_2\mu(t_k)T(t_k) + x(t_k)\right] + \frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1 - e^{\theta_1 T(t_k)(1-\mu(t_k))}\right] \tag{5.23}$$

Si denotamos $\Psi_1 = e^{-\theta_1}$, $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$ y $\Psi_3 = \theta_2 T(t_k)$, la dinámica en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrita sobre los instantes de muestreo t_k, está dada por :

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} \left[\mu(t_k)T(t_k)\Psi_3 - \Psi_2\right] + \Psi_2 \qquad (5.24)$$

Notese que el modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es no lineal en las dos nueva entradas de control, $\mu(t_k)$ y $T(t_k)$. Por otro lado la cantidad $\Psi_3 T(t_k) = \theta_2 T(t_k)$ representa, para todos los instantes de tiempo t_k, una cota superior del "rizo" de la corriente de entrada en el inductor del circuito, esto es, $x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) - x(t_k) = \theta_2 \mu(t_k) T(t_k) < \theta_2 T(t_k)$.

El autovalor, variante en el tiempo, asociado con la dinámica de estado muestreado, dado por $\Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}$, es positivo y no mayor que la unidad para todos los valores de μ restringidos al intervalo unitario $[0, 1]$. El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por x_∞^-, que corresponde a una función de razón de trabajo constante μ_∞ y al valor mínimo posible del ciclo de trabajo $T_{\min}$, se obtiene de (5.24) como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T(t_k)} \left[\mu_\infty T(t_k)\Psi_3 - \Psi_2\right] + \Psi_2}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T(t_k)}} \qquad (5.25)$$

Ahora, empleando la *formula de Cauchy*, podemos obtener la ecuación en tiempo discreto que describe la dinámica de las "esquinas superiores" del "rizo" presentado por la corriente de entrada,

$$\begin{aligned} x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_{k+1})) &= \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) + \Psi_3 \mu(t_{k+1})T(t_{k+1}) \\ &+ \Psi_2 \left(1 - \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}\right) \qquad (5.26) \end{aligned}$$

$\Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}$ constituye el autovalor asociado con la dinámica anterior, el cual es estrictamente positivo y menor o igual que la unidad para valores de $\mu(t_k)$ en el intervalo $[0, 1]$. El valor en estado estacionario de la porción "superior" de la trayectoria de estado, descrita por (5.26), que corresponde a valores constantes de la razón y del ciclo de trabajo μ_∞ y $T_{\min}$, viene dado por:

$$x_\infty^+ = \frac{\mu_\infty T_{\min}\Psi_3 + \Psi_2\left(1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right)}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}} \qquad (5.27)$$

En base a las ecuaciones (5.25), (5.27) y al hecho que $\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} < 1$, se puede confirmar que $x_\infty^- < x_\infty^+$ para $\mu_\infty \in [0, 1]$ y cualquier escogencia de $T_{\min}$.

El "rizo" en estado estacionario, denotado por r_∞, puede escribirse como:

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \Psi_3 \mu_\infty T_{\min} \qquad (5.28)$$

A partir de la expresión anterior vemos que no podemos relacionar a x_∞^+ y x_∞^- independientemente del control en estado estacionario μ_∞, lo cual impide que se pueda expresar explícitamente el valor promedio, en estado estacionario, de la corriente de entrada en términos del valor de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario.

El *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada se define, igual que antes, como:

$$x_{av}(\infty) = x_{\infty}^{-} + \frac{1}{2} r_{\infty} \tag{5.29}$$

Empleando la expresiones (5.25) y (5.28) en (5.29) encontramos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{\left[\Psi_3 \mu_\infty T_{\min}\left(1+\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right) + 2\Psi_2\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right)\right]}{2\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right)} \tag{5.30}$$

Resulta imposible expresar el valor en estado estacionario correspondiente al límite inferior de la trayectoria de la corriente de entrada muestreada x_{∞}^{-}, en términos del valor promedio en estado estacionario de la corriente de entrada $x_{av}(\infty)$, eliminando el control μ_∞. En consecuencia, se debe calcular primero numéricamente el valor de μ_∞ que corresponde al valor deseado en estado estacionario de la corriente promedio de entrada $X = x_{av}(\infty)$, a partir de la expresión (5.30). Este valor calculado de la razón de trabajo requerida en estado estacionario debe ser sustituído en la expresión que nos permite obtener $x_{\infty}^{-}(X)$ (5.25). Por medio de este procedimiento obtenemos el valor requerido en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, $x_{\infty}^{-}(X)$.

Hemos mostrado que la solución requerida, $x_{\infty}^{-}(X)$, para la corriente de entrada en estado estacionario, en términos del estado estacionario de la corriente promedio de entrada, $x_{av}(\infty) = X$, siempre existe para todo μ_∞ en el intervalo $[0, 1]$. Además tal solución es única. Manipulando la expresión (5.30) uno obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} = \frac{2X - \Psi_3\mu_\infty T_{\min} - 2\Psi_2}{2X + \Psi_3\mu_\infty T_{\min} - 2\Psi_2} \tag{5.31}$$

Recordemos que Ψ_1 y Ψ_3 son magnitudes positivas, y que $\Psi_1^{T_{\min}} < 1$. Consideremos ambos lados de la expresión (5.31) como funciones de μ_∞. La gráfica de la función de μ_∞ situada en el lado izquierdo de (5.31) es contínuamente creciente con una pendiente no–negativa y toma valores en el intervalo $[\Psi_1^{T_{\min}}, 1]$ cuando μ varía en $[0, 1]$. La gráfica de la función de μ_∞ de la parte derecha de (5.31), contínuamente decrece con una pendiente estrictamente negativa, cuando μ_∞ varia de 0 a 1, desde el valor 1 hacia la cantidad $M = (2X - \Psi_3 T_{\min} - 2\Psi_2)/(2X + \Psi_3 T_{\min} - 2\Psi_2)$ la cual es, ciertamente, menor que la unidad. De esta manera ambas funciones se interceptan, a lo sumo, en un punto en el intervalo $[0, 1]$, por lo tanto existe una solución única para μ_∞.

Política de Control Estabilizante

El problema de estabilización para el convertidor "boost–derivado" consiste en la especifición de una estrategia de regulación PFM de la forma (5.2), tal que el valor promedio, en estado estacionario, de la trayectoria de la corriente de entrada $x(t)$ se iguale a un valor constante deseado $x_{av}(\infty) = X$.

Se puede calcular implícitamente el control $\mu(t_k)$ a partir del modelo en tiempo discreto (5.24) al forzar a $x(t_k)$ a estabilizarse asintóticamente alrededor del valor x_∞^-, correspondiente a X, el cual hemos denotado por $x_\infty^-(X)$.

Impondremos sobre el sistema controlado, un comportamiento lineal asintóticamente estable en lazo cerrado, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha\left(x(t_k) - x_\infty^-(X)\right) + x_\infty^-(X) \quad ; \quad |\alpha| \, < \, 1 \tag{5.32}$$

Sustituyendo el lado derecho de la ecuación (5.24) en (5.32) y operando, encontramos la siguiente expresión transcendental:

$$\begin{aligned}\left[\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} - \alpha\right] x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)}\left[\mu_c(t_k)T(t_k)\Psi_3 - \Psi_2\right] \quad + \\ +\Psi_2 - (1-\alpha)\, x_\infty^-(X) = \quad 0\end{aligned} \tag{5.33}$$

A partir de la ecuación anterior es posible obtener en forma númerica la función de razón de trabajo para cada instante de muestreo.

Hemos asumido que la función del ciclo de trabajo $T(t_k)$ puede ser calculada como una función del error de estabilización, de manera similar a la descrita por la ecuación (5.18). La especificación del control se concentra entonces, en encontrar una función de razón de trabajo adecuada.

Reacomodando la ecuación anterior, hallamos la siguiente expresión equivalente para el controlador implícito:

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} = \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \mu_c(t_k)T(t_k)\Psi_3} \tag{5.34}$$

El lado izquierdo de la expresión (5.34) varía, como función de μ_c, desde la magnitud $\Psi_1^{T(t_k)} < 1$ a 1, con μ_c variando de 0 a 1. Para un valor dado de $x(t_k)$,y, por lo tanto, un determinado $T(t_k)$, el lado derecho de (5.34) toma valores, como función de μ_c, en el intervalo:

$$\left[\frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2}, \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3 T(t_k)}\right] \tag{5.35}$$

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una de intersección entre las gráficas de las funciones, en el intervalo $[0, 1]$, está dada por la condición:

$$\frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3 T(t_k)} < 1 \tag{5.36}$$

la cual equivale a:

$$x_{\infty}^{-}(X) < x(t_k) + \frac{\Psi_3 T(t_k)}{1-\alpha} \tag{5.37}$$

En estado estacionario, $x(t_k) = x_{\infty}^{-}(X)$, por lo que la condición (5.37)se satisface de manera trivial, ya que $\Psi_3 T_{\min} > 0$ y $|\alpha| < 1$. Así el controlador implícito descrito en (5.34) conduce a una solución única de la razón de trabajo μ_{∞}, la cual pertenece al intervalo $[0,1]$.

En régimen transitorio, la expresión (5.37) no tiene mucho sentido, más aún si se escoge a α como un número positivo no muy cercano a cero. Por lo tanto sin tomar en consideración la ecuación (5.37), podemos notar que el controlador implícito (5.34) *siempre* conduce a una solución única para $\mu_c(t_k)$, pero ésta no está, necesariamente, restringida al intervalo $[0,1]$.

La función de razón de trabajo se encuentra al limitar, con la ayuda de la ecuación (5.4), función de razón de trabajo calculada al intervalo cerrado $[0,1]$.

El esquema de regulación retroalimentado PFM para el convertidor "boost–derivado" basado en un modelo exacto en tiempo discreto de la corriente de entrada muestreada se expone en la figura 5.13.

5.2 Simulación. Para probar la robustez de la estrategia de regulación PFM basada en discretización exacta, se empleó el siguiente modelo perturbado del convertidor "boost–derivado" :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x + \left(\frac{E+\nu(t)}{L}\right) \tag{5.38}$$

donde $\nu(t)$ es una señal de perturbación estocástica generada por el computador que representa un ruido aditivo, no modelado, en la fuente de voltaje.

Los valores de los parámetros que definen el convertidor son:

$$R = 2.8 \times 10^{-2} \ \ \Omega \ \ ; \ \ L = 1.0 \times 10^{-2} \ \ \mathrm{mH} \ \ ; \ \ E = 126 \ \ \mathrm{Volts}$$

La función del ciclo de trabajo se escogió de forma idéntica al ejemplo del convertidor "buck–derivado"

El valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en $X = 6000$ A. El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado, α, se fijó en 0.3. Calculando se llega a que $x_{\infty}^{-}(6000) = 5804.7$ A.

La figura 5.16 muestra la trayectoria de la corriente de entrada, la funciónes de razón de trabajo $\mu(t)$ y de ciclo de trabajo $T(t)$ así como también la señal de perturbación $\nu(t)$.

Como podemos observar, a pesar de la señal de perturbación aleatoria, la estabilización de la corriente promedio de entrada se efuectúa en forma bastante satisfactoria.

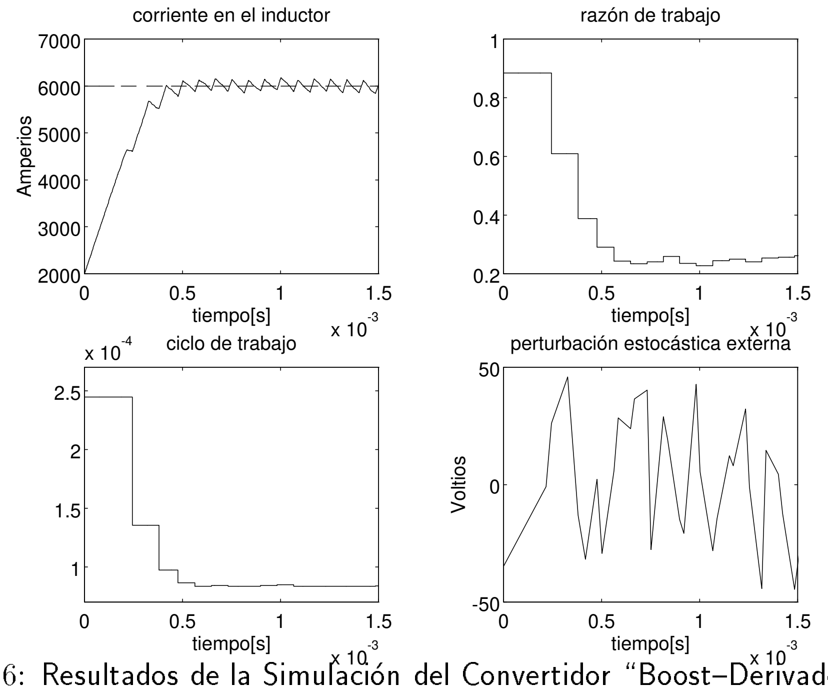

Figura 5.16: Resultados de la Simulación del Convertidor "Boost–Derivado", mediante PFM.

Convertidor "Buck–Boost–Derivado".

A continuación sintetizaremos todas las ecuaciones relevantes que conducen al diseño del controlador PFM estabilizante para el convertidor "buck–boost–derivado". La obtención de la función de razón de trabajo requerida está basada en un valor deseado de la corriente promedio de entrada X. La función del ciclo de trabajo es nuevamente generada por una ley de la forma (5.18).

El modelo regulado mediante conmutación del convertidor "buck–boost–derivado".

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}(1-u)x - \frac{E}{L}\,u \\ &= -\theta_1(1-u)x - \theta_2 u \end{aligned} \tag{5.39}$$

Estrategia de regulación PFM para la posición del interruptor.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t_k \;\leq\; t \;<\; t_k + \mu(t_k)T(t_k) \\ 0 & \text{para} \quad t_k + \mu(t_k)T(t_k) \;\leq\; t \;<\; t_k + T(t_k) \end{cases} \tag{5.40}$$
$$t_{k+1} = t_k + T(t_k)\ ;\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Una discretización exacta de la dinámica regulada PFM del convertidor "buck–boost–derivado".

$$x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) = -\theta_2\mu(t_k)T(t_k) + x(t_k) \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned} x(t_k + T(t_k)) &= e^{-\theta_1(1-\mu(t_k))T(t_k)}\left[-\theta_2\mu(t_k)T(t_k) + x(t_k)\right] \\ &= \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}x(t_k) - \Psi_1^{(1-\mu(t_k))}\Psi_3\mu(t_k)T(t_k) \end{aligned} \tag{5.42}$$

Valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada.

$$x_\infty^- = -\frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\mu_\infty T_{\min}\Psi_3}{1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}} \tag{5.43}$$

Dinámicas en tiempo discreto de las "esquinas superiores" de la trayectoria de la corriente de entrada regulada PFM.

$$x(t_{k+1}+\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k)T(t_k))}x(t_k+\mu(t_k)T(t_k)) - \Psi_3\mu(t_{k+1})T(t_k) \tag{5.44}$$

Valor en estado estacionario de las "esquinas superiores" de la trayectoria de la corriente de entrada.

$$x_\infty^+ = -\frac{\mu_\infty\Psi_3 T_{\min}}{1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}} \tag{5.45}$$

Valor del "rizo" en estado estacionario.

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = -\Psi_3\mu_\infty T_{\min} \tag{5.46}$$

Valor promedio en estado estacionario de la trayectoria de la corriente de entrada.

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2}r_\infty = -\frac{\left[\Psi_3\mu_\infty T_{\min}\left(1+\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right)\right]}{2\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}\right)} \tag{5.47}$$

Note que $2Xav(\infty) < -\Psi_3\mu_\infty T_{\min}$.

Existencia de una función de razón de trabajo para un valor deseado de la corriente de entrada promedio en estado estacionario.

$$\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} = \frac{2X_{av}(\infty) + \Psi_3\mu_\infty T_{\min}}{2X_{av}(\infty) - \Psi_3\mu_\infty T_{\min}} \tag{5.48}$$

Una solución para μ_∞ siempre existe en $[0,1]$ a partir del hecho que $X_{av}(\infty) < 0$ y $\Psi_3 T_{\min} > 0$. Ciertamente, en el intervalo $[0,1]$, el lado izquierdo varía de $\Psi_1^{T_{\min}} < 1$ a 1 mientras el lado derecho varía de 1 a $(2X_{av}(\infty) + \Psi_3 T_{\min})/(2X_{av}(\infty) - \Psi_3 T_{\min})$, lo cual corresponde a un valor menor que 1, y puede aún ser negativo, por virtud del hecho que $|2X_{av}(\infty) - \Psi_3 T_{\min}| > |2X_{av}(\infty) + \Psi_3 T_{\min}|$.

Dinámica deseada en lazo cerrado (asintóticamente estable).

$$x(t_{k+1}) = \alpha \left(x(t_k) - x_\infty^-(X) \right) + x_\infty^-(X) \quad ; \quad |\alpha| \; < \; 1 \tag{5.49}$$

Función del ciclo de trabajo.

$T(t_k)$ es una función retroalimentada del error de estabilizacion
como la definida en (5.18)

Sintetizador implícito de la razón de trabajo.

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} = \frac{\alpha x(t_k) + (1-\alpha)\, x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_3 \mu_c(t_k) T(t_k)} \tag{5.50}$$

Dado $x(t_k)$ una solución para $\mu_c(t_k)$ existe, en el entervalo $[0,1]$ sí, y solo sí, la siguiente condición se mantiene:

$$x_\infty^-(X) < x(t_k) - \frac{\Psi_3 T(t_k)}{1-\alpha} \tag{5.51}$$

la cual se puede interpretarse de forma similar a (5.37) y es trivialmente satisfecha en estado estacionario.

5.3 Simulación. Simulaciones digitales fueron desarrolladas a partir del siguiente modelo perturbado del convertidor "buck–boost–derivado" conjuntamente con el sintetizador de la razón de trabajo propuesto,

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x - \left(\frac{E + \nu(t)}{L} \right) u \tag{5.52}$$

Los valores de los parámetros del convertidor y del autovalor de la la dinámica impuesta en lazo cerrado, así como la función del ciclo de trabajo fueron tomados igual que en el caso anterior. El valor deseado en estado estacionario para la corriente promedio de entrada se colocó en -1500 A. Se encontró $x_\infty^-(-1500) = -1304$ A. En la figura 5.17 se muestran los resultados obtenidos.

□ □ □

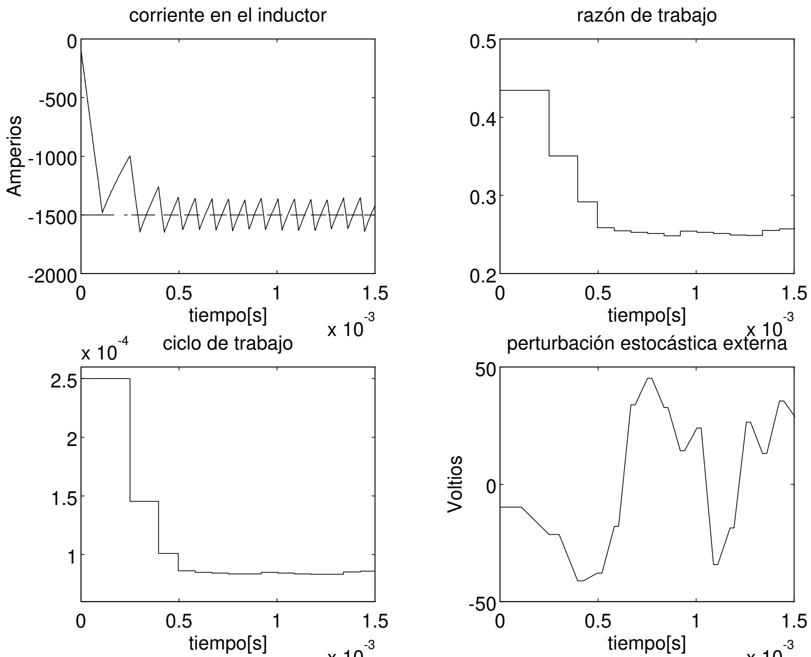

Figura 5.17: Resultados de la Simulación del Convertidor "Buck–Boost–Derivado", mediante PFM.

En el desarrollo del capítulo, hemos presentamos los fundamentos de una discretización exacta para el problema de estabilización PFM de la corriente de entrada, en las versiones derivadas de los convertidores "buck", "boost" y "buck–boost". Se propuso un esquema de control basado en PFM, el cual considera una muestra discreta del error de retroalimentación y, mediante una función *fija* lineal, se determina el período de muestreo variable, dentro de los limites de saturación. Por otra parte, la razón de trabajo se especificó como un control *linealizante* retroalimentado, en tiempo discreto, que coduce la dinámica del error, en lazo cerrado, a la estabilidad asintótica.

□ □ □

5.3 Estrategía de Regulación de Modelos de 2o. orden, mediante PWM, en tiempo discreto

En la anterior sección el tema tratado fue de los convertidores DC–DC derivados, de los tipos "Buck", "Boost" y "Buck–Boost", ahora en esta sección se considerará a los circuitos convertidores DC–DC, completos, lograndose esto mediante la inclusión del capacitor a la salida, pasando desde ahora a ser este voltaje en el capacitor, nuestra variable a controlar, esto permitirá comparar los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta de regulación retroalimentada PWM y sus modelos alcanzados a través de una discretización exacta ha una literatura existente más amplia, tratante del tema de los Convertidores DC–DC, del tipo "Boost" y "Buck–Boost". En base a la discretización exacta planteada mediante una política de control PWM (5.2), permitirá el cálculo fuera de línea del valor del "rizo" en estado estacionario de la corriente de entrada en la inductancia y así lograr regular en forma indirecta la salida de voltaje en el capacitor.

Circuito Convertidor "Boost"

Considerese el circuito convertidor "boost", que se muestra en la figura 5.18.

El modelo regulado mediante conmutación, que describe el comportamiento del circuito "boost" esta dado por,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{L}\,(1-u)\,x_2 + \frac{E}{L} \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{C}\,(1-u)\,x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

donde x_2 es el voltaje de salida, $y = x_1$ la corriente de entrada en el inductor y los parametros $R, L,$ y E estan definidos, por la resistencia de carga, la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje de entrada constante, respectivamente. La variable u denota la *función de la posición del interruptor* tomando valores en el conjunto discreto $\{0,1\}$.

La estrategia de regulación referida en la ecuación (5.2), en base a la función de la posición del interruptor u, dada por,

$$
u(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{for} & t_k \le t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{for} & t_k + \mu(t_k)T \le t < t_k + T \end{array} \right.
\tag{5.2}
$$
$$
t_{k+1} = t_k + T \;;\; k = 0, 1, 2, \ldots
$$

donde $\mu(\cdot)$ es conocida como la *función de razón de trabajo*, adoptando valores en el intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real.T es el período de muestreo y t_k es el

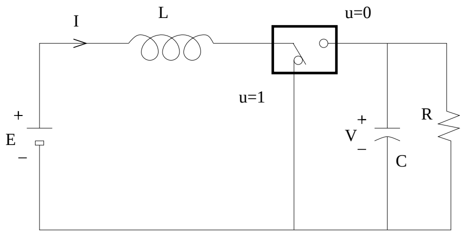

Figura 5.18: Circuito Convertidor "Boost".

instante de muestreo. Dado que la *razón de trabajo* μ depende del valor muestreado de la corriente de entrada $y(t_k)$ en cada instante de muestreo t_k en forma explícita al retroalimentarse al sistema, es necesario restringirla, mediante un limitador, a tomar valores dentro del intervalo $[0, 1]$.

Discretización exacta

En esta sección elaboraremos un modelo de tiempo discreto que reproduce el valor de estado muestreado sobre cada instante de muestreo t_k apoyandonos en la naturaleza lineal entre las dos topologías posibles (ver figuras 5.20 y 5.21), generadas por las dos únicas posiciones naturales de la variable de entrada $u = 0$ y $u = 1$, representada por el interruptor en el circuito convertidor "Boost" descrito mediante las ecuaciones diferenciales en (5.1). Y de la ya sabida existencia del "rizo natural", o movimiento en "zig-zag" que se forma en la trayetoria $y(t_k)$, producto de las discontinuidades asociadas a esta misma variable de entrada $u(t_k)$, al ser controlada vía PWM. Los valores del "rizo" son despreciados por tal modelo, sin embargo, pueden ser calculados mediante manipulaciones sencillas. Ha manera de ilustrar la anterior descripción observese, el comportamiento típico de la función de posición de un interruptor y una trayectoria controlada, gobernada por una política PWM, expuesta en la figura 5.19.

Formulación del modelo discretizado

La formulación del modelo discreto, se obtendra de la unión de las soluciones de la variable de salida y, definidas por la corriente de entrada al circuito por medio del inductor, en sus dos formas lineales separadas, generadas por los dos circuitos asociadas con cada una de las dos posiciones del interruptor regulador u sobre el modelo del circuito "Boost", a fin de obtener una simplificación del comportamiento global del modelo.

Considerando el sistema cuando $u = 1$, resulta el circuito expuesto en la figura 5.20,

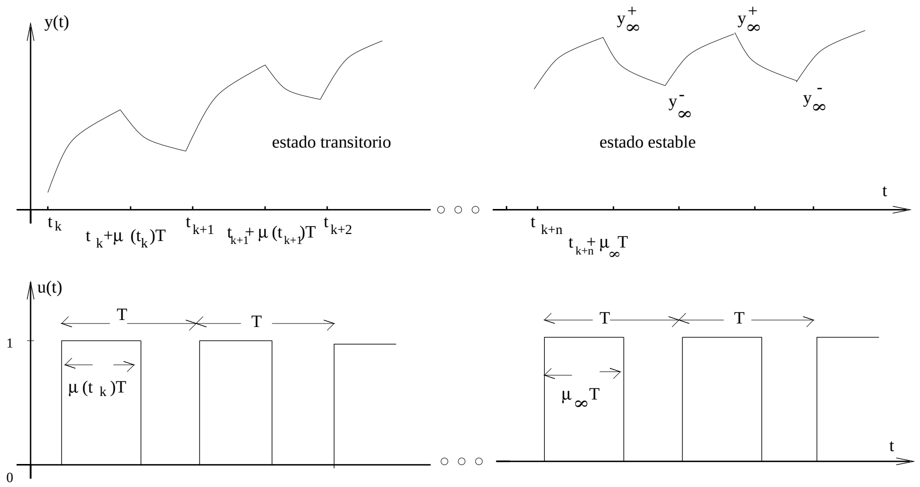

Figura 5.19: Modelo controlado vía PWM

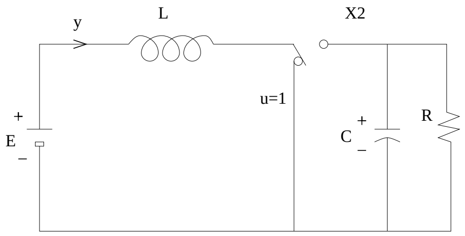

Figura 5.20: Circuito Convertidor "Boost", u=1.

se generan dos circuitos desacoplados, donde la variable de salida del circuito definida por la variable y en el modelo (5.1), esta perfectamente determinada por la solución de la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{y} = \frac{E}{L} \tag{5.3}$$

la solución general esta dada por,

$$y(t) = \frac{E}{L}(t - t_0) + y(t_0) \tag{5.4}$$

Discretizando la ecuación anterior en el intervalo, desde t_k hasta $t_k + \mu_k$, correspondiente al intervalo donde la variable de entrada de control es $u = 1$, uno se puede uno ayudar vizualmente con la figura 5.19, por lo tanto, tenemos la forma siguiente,

$$\begin{aligned} y(t_k + \mu_k T) &= y(t_k) + \frac{E}{L}\mu_k T \\ & \quad donde: \\ \dot{y}(t_k + \mu_k T) &= \frac{E}{L} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Es importante observar el resultado anterior y en las condiciones iniciales planteadas. El valor de la condición inicial E/L, para la corriente de entrada en el inductor, se da en base al hecho del carácter amplificador, al ya conocido convertidor "amplificador" denominación dada también al convertidor "Boost", debido a que la corriente de entrada es, teóricamante, capaz de tomar cualquier valor dentro del intervalo $[E/R, \infty]$, esto es facilmente verificable a partir de las ecuaciones del circuito (5.1). Con respecto a la condición inicial de la derivada de la corriente de entrada para empezar el siguiente ciclo hecho reflejado en la ecuación (5.5), y dado al carácter discontínuo de la variable de control u vía la política PWM, produce el ya conocido "rizo natural" tambien de carácter discontínuo; la teoría de sistemas discontinuos (Fillipov), plantea la necesidad imperiosa de coincidir el valor de la derivada en este instante de muestreo $t_k + \mu_k T$, punto de unión del cambio de estructura, para lo cual, al revisar la ecuación que describe el modelo del convertidor "Boost" (5.1), es válido la anterior condición inicial para la obtención del modelo discreto solo cuando el valor del voltaje de salida en el capacitor es igual a cero en el instante de muestreo $t_k + \mu_k T$.

Considerese ahora el hecho de $u = 0$. El circuito resultante se muestra en la siguiente figura 5.21.

La ecuación de salida del sistema y, fisicamente representada por la variable de la corriente de entrada en el inductor, generada al aplicarse el valor de $u = 0$ al modelo

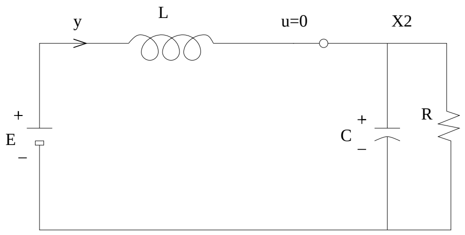

Figura 5.21: Circuito Convertidor "Boost", u=0.

del Convertidor "Boost", y delineada mediante la topología de la figura (5.21), esta definida por la siguiente ecuación diferencial,

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}(y - \frac{E}{R}) = 0 \tag{5.6}$$

la solución general de la anterior ecuación (5.6) esta dada por,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{E}{R} + \frac{1}{m_2 - m_1}\left[\left(m_2\, e^{m1(t-t_0)} - m_1\, e^{m_2(t-t_0)}\right)\ (y(t_0) - \frac{E}{R}) + \right. \\ &+ \left.\left(e^{m2(t-t_0)} - e^{m_1(t-t_0)}\right)\ \dot{y}(t_0)\right] \\ &\quad \text{donde:} \\ &\quad m_{1,2} \quad \text{son las raíces de} \\ m^2 + \frac{1}{RC}\, m + \frac{1}{LC} &= 0 \qquad (5.7) \\ &\quad \text{Las raíces } m_{1,2} \text{ se asumen reales diferentes, y negativas.} \end{aligned}$$

La discretización exacta de esta última ecuación (5.7), en el intervalo $[t_k + \mu_k T, t_{k+1}]$, delineada en la figura (5.19), con condiciones iniciales en el instante, de muestreo $t_k + \mu_k$, dados por las expresiones de (5.5), despues de realizar estas manipulaciones nos queda la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} y(t_k + T) &= \left[\frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\, e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\, e^{m_2(1-\mu_k)T}\right)\right]\ y(t_k) + \\ &+ \frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\, e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\, e^{m_2(1-\mu_k)T}\right)\left(\frac{E}{L}\mu_k T - \frac{E}{R}\right) + \\ &+ \frac{1}{m_2 - m_1}\left(e^{m_1(1-\mu_k)T} - e^{m_2(1-\mu_k)T}\right)\frac{E}{L} + \frac{E}{R} \end{aligned} \tag{5.8}$$

la cual representa el modelo en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrito sobre los instantes de muestreo, donde la función de trabajo μ_k, en el instante de muestreo t_k, tiene una representación no–lineal. Los autovalores estan determinados por la selección del diseñador, dados por $m_{1,2}$, mediante la correcta ubicación de los polos. La regulación en forma indirecta del voltaje de la salida, mediante el control de la entrada de corriente, proporciona como resultado un sistema de fase mínima.

La política de regulación retroalimentada especificada por la razón de trabajo $\mu(t_k)$ a partir del estado muestreado $y(t_k)$, requiere de la generalización de $y(t)$ en los instantes de muestreo $t = t_k+\mu(t_k)T \;\; k = 0, 1, 2, ...$ (vease figura 5.19). Este valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada lo denotaremos por y_∞^- y le corresponde un valor de razón de trabajo constante de valor μ_∞, representado el valor inferior del famoso "rizo natural" generado alrededor del valor de la consigna o valor deseado. El valor inferior del rizo, entonces, esta dado por,

$$\begin{aligned} y_\infty^- &= \frac{m_2\, e^{m_1(1-\mu_\infty)T} - m_1\, e^{m_2(1-\mu_\infty)T}}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{L}\mu_\infty T + \\ &+ \frac{e^{m_2(1-\mu_\infty)T} - \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{L} + \\ &+ \frac{m_2 - m_1 - m_2\, e^{m_1(1-\mu_\infty)T} + m_1\, e^{m_2(1-\mu_\infty)T}}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{R} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Retomando la ecuación (5.5), es facilmente verificable la magnitud del rizo $\frac{E}{L}\mu_\infty T$, para lo cual, el valor superior del rizo estará dado por la relación, $y_\infty^+ = y_\infty^- + \frac{E}{L}\mu_{infty}T$

$$\begin{aligned} y_\infty^+ &= \frac{m_2 - m_1}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{L}\mu_\infty T + \\ &+ \frac{e^{m_2(1-\mu_\infty)T} - \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{L} + \\ &+ \frac{m_2 - m_1 - m_2\, e^{m_1(1-\mu_\infty)T} + m_1\, e^{m_2(1-\mu_\infty)T}}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{R} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dada la existencia del "rizo", el valor ha regular hasta conseguir el valor de la consigna o valor de referencia será el valor medio o promedio del ancho del rizo $y_{av} = 1/2\;(y_\infty^+ + y_\infty^-)$, y en forma explícita,

$$\begin{aligned} y_{av}(\infty) &= \frac{1}{2}\,\frac{m_2\left(1+ \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1+ \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{L}\mu_\infty T + \\ &+ \frac{e^{m_2(1-\mu_\infty)T} - \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}}{m_2\left(1- \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\right) - m_1\left(1- \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} \frac{E}{L} + \end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{m_2 - m_1 - m_2\, e^{m_1(1-\mu_\infty)T} + m_1\, e^{m_2(1-\mu_\infty)T}}{m_2\,(1 - \; e^{m_1(1-\mu_\infty)T}) - m_1\,(1 - \; e^{m_2(1-\mu_\infty)T})}\,\frac{E}{R} \tag{5.11}$$

Nuevamente, el *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada, es imposible expresarlo como una función del valor en estado estacionario, de la trayectoria muestreada de la corriente de entrada, y_∞^-. Por lo tanto es necesario resolver la ecuación (5.11) numericamente, este cálculo puede ser resuelto fuera de línea, y obtener el valor requerido en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, $y_\infty^-(Y)$ al cual debe ser conducida la dinámica controlada y exactamente discretizada de la ecuación (5.8) debe ser conducida, por medio de la apropiada razón de trabajo. La política de control obliga a la corriente de entrada, en estado estacionario, a alcanzar el valor promedio deseado.

Política de Control Estabilizante

La metodolgía para la estabilización del convertidor "Boost", mediante un modelo discreto, consiste en especificar mediante la política de regulación PWM (5.2), el valor promedio en estado estacionario muestreado (5.8), de la trayectoria controlada de la corriente de entrada $y(t)$, y este alcanze en estado estable igual a un valor constante deseado $y_{av}(\infty) = Y$, proporcionado por el diseñador. Resumiendo es posible obtener un política de regulación estabilizante implícita para forzar a $y(t_k)$ a estabilizarse asintóticamente alrededor del valor $y_\infty^-(Y)$.

Imponiendo al sistema muestreado un comportamiento lineal en lazo cerrado y aintóticamente estable, de la siguiente forma,

$$y(t_k + T) \;\; = \;\; \alpha(y(t_k) - y_\infty^-(Y)) + y_\infty^-(Y) \quad |\alpha| < 1 \tag{5.12}$$

Sustituyendo el modelo discreto obtenido en (5.8) en la anterior expresión (5.12), obtenemos la siguiente relación, y de la cual podemos obtener la *razón de trabajo* en forma implícita,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\left(\, e^{m_1(1-\mu_k)T} - \alpha\right) - m_1\left(\, e^{m_2(1-\mu_k)T} - \alpha\right)\right)\right]\; y(t_k) \quad + \\
+\frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\, e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\, e^{m_2(1-\mu_k)T}\right)\left(\frac{E}{L}\mu_k T - \frac{E}{R}\right) \quad + \\
+\frac{1}{m_2 - m_1}\left(\, e^{m_1(1-\mu_k)T} - \; e^{m_2(1-\mu_k)T}\right)\frac{E}{L} + \frac{E}{R} + \alpha\, y_\infty^-(Y) - y_\infty^-(Y) \;\; = \;\; 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Unicidad de solución

La existencia de una solución unica, comprendida entre el intervalo $[0, 1]$ para el valor de μ_k, lo obtendremos con la representación del comportamiento de malla cerrada del sistema definido en la ecuación (5.15) en una forma conveniente para este caso.

Reacomodando la ecuación (5.13), tenemos,

$$\begin{aligned}
\alpha\left[\, y(t_k) - \, y_\infty^-(Y)\right] - \left[\, y(t_k)\,\beta - \, y_\infty^-(Y)\right] &= \beta\left[\frac{E}{L}\mu_k T - \frac{E}{R}\right] + \gamma\,\frac{E}{L} + \frac{E}{R} \qquad (5.14)\\
&\text{donde:}\\
\beta &= \frac{m_2\; e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\; e^{m_2(1-\mu_k)T}}{m_2 - m_1}\\
\gamma &= \frac{e^{m_1(1-\mu_k)T} - \; e^{m_2(1-\mu_k)T}}{m_2 - m_1}
\end{aligned}$$

despejando a β,

$$\frac{m_2\; e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\; e^{m_2(1-\mu_k)T}}{m_2 - m_1} = \frac{y_\infty^-\,(1-\alpha) + \alpha y(t_k) - \gamma\frac{E}{L} - \frac{E}{R}}{\frac{E}{L}\mu_k T - \frac{E}{R} + y(t_k)} \qquad (5.15)$$

Analizando la ecuación 5.15, necesitamos en primera instancia mediante el lugar geométrico de las raíces, ubicar el valor de las raíces. Sabemos por la definición en la ecuación 5.7 que el valor de las raíces esta determinadas por,

$$\begin{aligned}
m_2 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\\
m_1 &= -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

con la condición además de ser reales, diferentes y menores de cero, esto nos lleva a la condición de ubicar los valores del capacitor a $c < \frac{L}{4\,R^2}$, para valores definidos de L y R. Otra consideración en la metodología del diseño a tomar en cuenta es la constante de descarga del arreglo de R, C del circuito la cual debe ser un factor de 10 veces más rápida que la frecuencia de trabajo $1/T$, para lo cual $c < \frac{L}{40\,R^2}$. La razón de esta última condición es cumplir con las mismas condiciones iniciales en ambas ecuaciones, (5.5) y (5.7), en el mismo tiempo de muestreo. Es fácil observar que dadas estas condiciones la ubicación de raíces satisface la secuencia $0 > m_2 >> m_1$. Esta última consecuencia ubica el lado derecho de la ecuación 5.15 en valores positivos menores de uno, $0 < \beta < 1$, para valores de μ_k comprendidos entre $[0, 1]$, "AQUEI ENTRE-NOUS VALORES ENTRE aprox: $e^{m2\,T}$ hasta 1 para valores de $0 < \mu_k < 1$".

Para la existencia de una solución factible, se debe dar la intersección de la solución para valores comprendidos entre $0 < \mu_k < 1$ y el intervalo cerrado definido por, (lado derecho de la ecuación 5.15)

$$\left[\frac{y_{\infty}^{-}(1-\alpha)+\alpha y(t_k)-\gamma\frac{E}{L}-\frac{E}{R}}{-\frac{E}{R}+y(t_k)}, \frac{y_{\infty}^{-}(1-\alpha)+\alpha y(t_k)-\frac{E}{R}}{\frac{E}{L}\,T-\frac{E}{R}+y(t_k)}\right] \tag{5.16}$$

La condición suficiente es,

$$\frac{y_{\infty}^{-}(1-\alpha)+\alpha y(t_k)-\frac{E}{R}}{\frac{E}{L}\,T-\frac{E}{R}+y(t_k)} < 1 \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} y_{\infty}^{-}(1-\alpha)+\alpha y(t_k)-\frac{E}{R} &< \frac{E}{L}\,T-\frac{E}{R}+y(t_k) \\ y_{\infty}^{-} &< y(t_k)+\frac{\frac{E}{L}\,T}{1-\alpha} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ufhh!, En estado estacionario $y(t_k) = y_{\infty}^{-}$, y la suma algebraica $1-\alpha$ por definición de α simpre es positiva la suma, la condición sufiente por lo tanto $\frac{E}{L}\,T > 0$ también se cumple, colorín colorado, este cuento se ha acabado.

5.4 Simulación. apuntemos

□ □ □

Circuito "Buck–Boost

Considerese el circuito convertidor "atenuador–amplificador", nombre tambien dado al circuito "buck–boost", que se expone en la figura 5.22

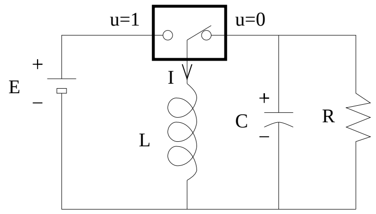

Figura 5.22: Circuito Convertidor "Buck–Boost".

A continuación sintetizaremos las ecuaciones relevantes que conducen al diseño del controlador estabilizante.

Modelo "Buck–Boost", representación de estados.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{1}{L}\,(1-u)\,x_2 + \frac{E}{L}\,u \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}\,(1-u)\,x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Descripción de la ecuación diferencial de salida.
$u = 1$,

$$
\dot{y} = \frac{E}{L}
\tag{5.20}
$$

$u = 1$,

$$
\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = 0
\tag{5.21}
$$

Soluciones Generales.
$u = 1$

$$
y(t) = \frac{E}{L}\,(t - t_0) + y(t_0)
\tag{5.22}
$$

$u = 0$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{m_2 - m_1}\left[\left(m_2\; e^{m1(t-t_0)} - m_1\; e^{m_2(t-t_0)}\right)\; y(t_0) + \right. \\
&+ \left.\left(e^{m2(t-t_0)} - \; e^{m_1(t-t_0)}\right)\; \dot{y}(t_0)\right] \\
&\text{donde:} \\
&m_{1,2} \quad \text{son las raíces de} \\
m^2 + \frac{1}{RC}\,m + \frac{1}{LC} &= 0
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Las raíces $m_{1,2}$ se asumen reales diferentes, y negativas.

Discretización exacta.

$u = 1$,

$$
\begin{aligned}
y(t_k + \mu_k T) &= \frac{E}{L}\mu_k T + y(t_k) \\
\dot{y}(t_k + \mu_k T) &= \frac{E}{L}
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

$u = 0$,

$$
\begin{aligned}
y(t_k + T) &= \left[\frac{1}{m_2 - m_1}\left(m_2\ e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\ e^{m_2(1-\mu_k)T}\right)\right]\ y(t_k) + \\
&+ \frac{E}{L}\frac{1}{m_2 - m_1}\left[(m_2\mu_k T - 1)\ e^{m_1(1-\mu_k)T} - (m_1\mu_k T - 1)\ e^{m_2(1-\mu_k)T}\right]
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

valor en estado estacionario de la corriente de entrada promedio.

$$
y_\infty^- = \frac{E}{L}\frac{e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\,(m_2\mu_\infty T - 1) - e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\,(m_1\mu_\infty T - 1)}{m_2 - m_1 - \left(m_2\ e^{m_1(1-\mu_\infty)T} - m_1\ e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)}
\tag{5.26}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{av} &= \frac{E}{L}\frac{e^{m_1(1-\mu_\infty)T}\,(m_2\mu_\infty T - 1)\,(1 - 1/2\mu_\infty T)}{m_2 - m_1 - \left(m_2\ e^{m_1(1-\mu_\infty)T} - m_1\ e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} - \\
&- \frac{E}{L}\frac{e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\,(m_1\mu_\infty T - 1)\,(1 - 1/2\mu_\infty T)}{m_2 - m_1 - \left(m_2\ e^{m_1(1-\mu_\infty)T} - m_1\ e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{E}{L}\frac{\mu_\infty T(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1 - \left(m_2\ e^{m_1(1-\mu_\infty)T} - m_1\ e^{m_2(1-\mu_\infty)T}\right)}
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

$$
y(t_k + T) = \alpha(y(t_k) - y_\infty^-(Y)) + y_\infty^-(Y) \quad |\alpha| < 1
\tag{5.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(m_2\ e^{m_1(1-\mu_k)T} - m_1\ e^{m_2(1-\mu_k)T} - \alpha\right)\ y(t_k) &+ \\
+\frac{E}{L}\ \left[(m_2\mu_k T - 1)\ e^{m_1(1-\mu_k)T} - (m_1\mu_k T - 1)\ e^{m_2(1-\mu_k)T}\right] &+ \\
+(m_2 - m_1)\ y_\infty^-(Y)(\alpha - 1) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

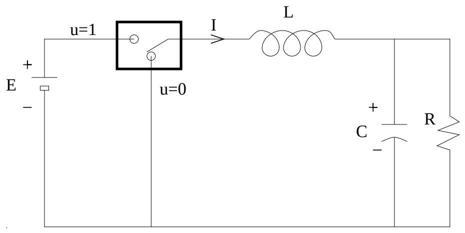

Figura 5.23: Circuito Convertidor "Buck".

Convertidor "Buck"

estabilización

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{L}x_2 + u\frac{E}{L} \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Ecuaciones diferenciales de salida.
$u = 0$

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = 0 \tag{5.31}$$

$u = 1$

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}(y - \frac{E}{R}) = 0 \tag{5.32}$$

Soluciones generales.
$u = 0$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{m_2 - m_1}\left[\left(m_2\, e^{m1(t-t_0)} - m_1\, e^{m_2(t-t_0)}\right)\, y(t_0) + \right. \\
&+ \left.\left(e^{m2(t-t_0)} - e^{m_1(t-t_0)}\right)\, \dot{y}_1(t_0)\right]
\end{aligned}
$$

donde:

$m_{1,2}$ son las raíces de

$$m^2 + \frac{1}{RC}\, m + \frac{1}{LC} = 0 \tag{5.33}$$

Las raíces $m_{1,2}$ se asumen reales diferentes, y negativas.

$u = 1$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{E}{R} + \frac{1}{m_2 - m_1}\left[\left(m_2\, e^{m1(t-t_0)} - m_1\, e^{m_2(t-t_0)}\right)\ (y(t_0) - \frac{E}{R}) + \right. \\
&+ \left. \left(\ e^{m2(t-t_0)} -\ e^{m_1(t-t_0)}\right)\ \dot{y}_2(t_0)\right] \\
&\text{donde:} \\
&m_{1,2} \quad \text{son las raíces de} \\
m^2 + \frac{1}{RC}\, m + \frac{1}{LC} &= 0 \qquad (5.34) \\
&\text{Las raíces } m_{1,2} \text{ se asumen reales diferentes, y negativas.}
\end{aligned}$$

5.4 Seguimiento de Señales vía Modelo Promedio en Tiempo Discreto.

El problema de seguimiento de una señal de referencia variante en el tiempo, en los convertidores derivados del tipo “buck”, “boost” y “buck–boost”, es tratado a través de su discretización exacta mediante la inclusión de modelos promedios, en tiempo discreto, para las trayectorias de la corriente de entrada regulada por PWM. Los modelos promedios son obtenidos mediante un procedimiento de eliminación del estado en las expresiones que describen el valor medio de la corriente de entrada en los instantes de muestreo y al final del pulso asociado con la función de posición del interruptor. La eliminación del estado conlleva a una representación no-Kalmaniana de la dinámica de la corriente promedio de entrada. Los modelos encontrados conducen a un sintetizador de la razón de trabajo dinámico, *explícito* y no lineal.

□ □ □

Definimos el valor *promedio* de la trayectoria de la corriente de entrada, en el instante t_k, como:

$$z(t_k) = x(t_k) + \frac{1}{2}\left[x(t_k + \mu(t_k)T) - x(t_k)\right] = \frac{1}{2}\left[x(t_k) + x(t_k + \mu(t_k)T)\right] \qquad (5.1)$$

Observación : Note que la asociación del valor promedio, denotado por $z(t_k)$, con el instante de tiempo t_k, y definido por $\frac{1}{2}\left[x(t_k) + x(t_k + \mu(t_k)T)\right]$, es completamente arbitraria. De hecho uno podría seleccionar un instante intermedio del intervalo, $[t_k, t_k + \mu(t_k)T]$, para representar el valor de tiempo correspondiente. Sin embargo, esta última convención solamente complicaría la representación aunado al hecho de no ser substancialmente diferente de la primera selección.

Similarmente, el valor promedio de la corriente de entrada en el instante $t_k + T$ está dado por:

$$z(t_{k+1}) = \frac{1}{2}\left[x(t_{k+1}) + x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T)\right] \qquad (5.2)$$

Una dinámica promedio PWM se puede conseguir de (5.1) y (5.2) por medio de un procedimiento de eliminación del estado. De igual forma, observe que para cada uno de los convertidores tratados, la expresión (5.1) para $z(t_k)$ puede ser escrita en términos del estado muestreado $x(t_k)$ y de la razón de trabajo $\mu(t_k)$ en el instante t_k. En forma similar, la expresión (5.2) para $z(t_k + 1)$ puede ser también escrita en términos de $x(t_k)$ y de la función de razón de trabajo μ en los instantes t_k y $t_k + 1$, es decir, $\mu(t_k)$ y $\mu(t_k + 1)$. De las ecuaciónes resultante para $z(t_k)$ y $z(t_k + 1)$

procedemos a eliminar el estado $x(t_k)$ y así obtener $z(t_k+1)$ como una función de $z(t_k)$ y de las funciones de la razón de trabajo $\mu(t_k)$, $\mu(t_k+1)$.

A causa de la linealidad en el estado asociado con toda la expresiones mencionadas, la dinámica promedio PWM resultante es también lineal en el estado $z(t_k)$. Uno obtiene una dinámica de la forma:

$$z(t_{k+1}) = \Phi_1(\mu(t_k), \mu(t_{k+1}))z(t_k) + \Phi_2(\mu(t_k), \mu(t_{k+1})) \tag{5.3}$$

la cual, evidentemente constituye una representación de estado no-kalmaniana, o más propiamente, una *representación de estado Generalizada* para la dinámica de la corriente promedio de entrada (*Fliess [9]*).

Al imponer una dinámica lineal deseada del error de seguimiento en tiempo discreto sobre la dinámica propuesta de la corriente promedio de entrada (5.3) se obtiene un sintetizador dinámico de la razón de trabajo.

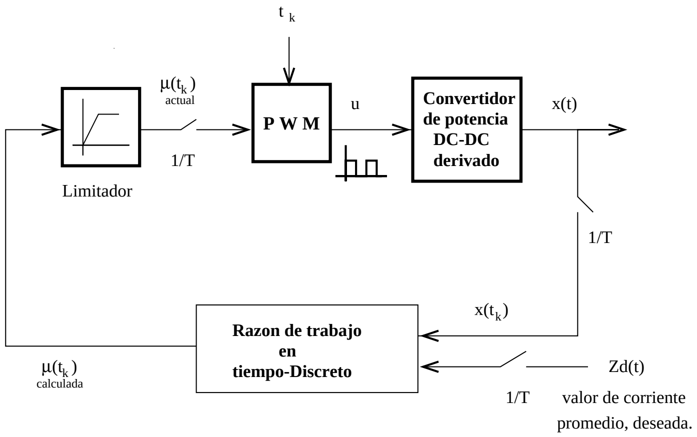

Figura 5.24: Esquema de Regulación mediante PWM, en Tiempo Discreto para el Problema del Seguimiento de una Señal en Convertidores de Potencia DC–DC.

El esquema de regulación dinámico retroalimentado es empleado para la solución mediante PWM del problema de seguimiento, asociado con los convertidores de potencia derivados DC–DC, tal como se muestra en la figura (5.24).

En las siguientes secciones se presentan el modelo promedio, en tiempo discreto, de la corriente de entrada junto con el sintetizador de la razón de trabajo para la solución correspondiente al problema del seguimiento para cada uno de los convertidores derivados estudiados.

Convertidor "Buck-Derivado".

La dinámica del valor promedio de la corriente de entrada $z(t_k)$ puede obtenerse como sigue. Primero sustituimos la ecuación (5.4):

$$x(t_k + \mu_k T) = \Psi_1^{\mu_k} x(t_k) + \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu_k})$$

en la expresión (5.1) y despejando la variable $x(t_k)$ de la relación encontrada, obtenemos:

$$x(t_k) = \frac{2\, z(t_k) - \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu_k})}{(1 + \Psi_1^{\mu_k})} \tag{5.4}$$

Similarmente, sustituimos las relaciones (5.4), (5.6) y (5.8):

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= \Psi_1\, x(t_k) + \Psi_1 \Psi_2(\Psi_1^{-\mu_k} - 1) \\ x(t_k + \mu_k T) &= \Psi_1^{\mu_k} x(t_k) + \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu_k}) \\ x(t_{k+1} + \mu_{k+1} T) &= \Psi_1^{\mu_{k+1}} \Psi_1^{(1-\mu_k)} x(t_k + \mu_k T) + \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu_{k+1}}) \end{aligned}$$

en la ecuación (5.2), encontrando la siguiente expresión para $x(t_k)$:

$$\begin{aligned} x(t_k) &= \frac{2\ z(t_{k+1})}{\Psi_1 \left[1 + \Psi_1^{\mu_{k+1}}\right]} \\ &+ \frac{\Psi_2}{\Psi_1\ \left[1 + \Psi_1^{\mu_{k+1}}\right]} \left\{ \Psi_1^{1-\mu_k}\ (1 - \Psi_1^{\mu_k})\ \left(1 + \Psi_1^{\mu_{k+1}}\right) + \left(1 - \Psi_1^{\mu_{k+1}}\right) \right\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Finalmente igualamos las ecuaciones (5.4) y (5.5). La dinámica promedio se constituye por la ecuación recursiva que surge al colocar a $z(t_{k+1})$ como una función de $z(t_k)$ y de las razones de trabajo $\mu(t_k)$ y $\mu(t_{k+1})$. Resumiendo, despues de las manipulaciones previamente indicadas obtenemos:

$$\begin{aligned} z(t_{k+1}) = \Psi_1 \left(\frac{1 + \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}}{1 + \Psi_1^{\mu(t_k)}} \right) z(t_k) + \\ + \frac{1}{2} \Psi_2 \left\{ \frac{\Psi_1^{1-\mu(t_k)}(1 - \Psi_1^{\mu(t_k)})(1 + \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}) + (1 - \Psi_1^{\mu(t_{k+1})})(1 + \Psi_1^{\mu(t_k)})}{1 + \Psi_1^{\mu(t_k)}} \right\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Un hecho interesante, el cual hace muy peculiar al modelo promedio, es que la formula recursiva resultante, obtenida para la evolución de los valores de corriente promedio, requiere los valores de la función de razón de trabajo, es decir, de la variable de control, en dos instantes de muestreo consecutivos.

Supongase que $\lim_{k\to\infty} \mu(t_k)$ existe y asumimos que está dado por el valor constante μ_∞, entonces, evidentemente, $\lim_{k\to\infty} \mu(t_k) = \mu_\infty$ y el correspondiente valor en estado estacionario, z_∞, de la corriente promedio de entrada, calculado de (5.6), está dado por:

$$z_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\Psi_2}{1-\Psi_1}\right)(1-\Psi_1^{\mu_\infty})\left(1+\Psi_1^{1-\mu_\infty}\right) \tag{5.7}$$

el cual corresponde exactamente con el valor en estado estacionario $x_{av(\infty)}$ calculado en (5.13) y encontrado a partir de consideraciones diferentes.

Seguimiento de la Corriente Promedio de Entrada

Sea $z_d(t)$ la representación de una señal de entrada de referencia deseada variante en el tiempo. Se desea que la corriente promedio de entrada $z(t_k)$ siga asintóticamente los valores muestreados, $z_d(t_k)$ de la señal de entrada de referencia.

Denotemos por $e(t_k)$ al error promedio de seguimiento en el instante de tiempo t_k, dado por $e(t_k) = z(t_k) - z_d(t_k)$. Entonces, la siguiente dinámica del error de seguimiento puede ser impuesta sobre el sistema en lazo cerrado :

$$e(t_{k+1}) = \alpha e(t_k) \;\; ; \;\; |\alpha| \, < \, 1 \tag{5.8}$$

En términos de la corriente promedio de entrada, tal dinámica resulta en la siguiente expresión :

$$z(t_{k+1}) = \alpha\left(z(t_k) - z_d(t_k)\right) + z_d(t_{k+1}) \tag{5.9}$$

Puesto que $z_d(t_k+1)$ se asume conocida de antemano, la ecuación precedente no tiene la conotación de un *sistema acausal.*

Sustituyendo el lado derecho de la expresión (5.6) dentro de (5.9), y resolviendo para $\mu(t_k+1)$ uno obtiene el siguiente controlador retroalimentado, no lineal, dinámico, variante en el tiempo, o sintetizador de la razón de trabajo, para el problema de seguimiento de la corriente promedio de entrada.

$$\begin{aligned}
\mu(t_{k+1}) \;\; = \;\; & \frac{1}{\ln\Phi_1}\ln\left\{\frac{2\left(1+\Psi_1^{\mu(t_k)}\right)}{\Psi_2\left[\Psi_1^{1-\mu(t_k)}(1-\Psi_1^{\mu(t_k)}) - (1+\Psi_1^{\mu(t_k)})\right] + 2\Psi_1 z(t_k)}\times\right. \\
& \left[-\frac{1}{2}\Psi_2\left(\frac{\Psi_1^{1-\mu(t_k)}(1-\Psi_1^{\mu(t_k)}) + (1+\Psi_1^{\mu(t_k)})}{1+\Psi_1^{\mu(t_k)}}\right)\right. \\
& \left.\left. -\left(\frac{\Psi_1}{1+\Psi_1^{\mu(t_k)}} - \alpha\right) z(t_k) - \alpha z_d(t_k) + z_d(t_{k+1})\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Observación : La inicialización del anterior controlador, requiere la especificación de $z(t_0)$ lo cual involucra el conocimiento de $x(t_0)$ y $\mu(t_0)$. La corriente de entrada inicial $x(t_0)$ puede ser medida, o simplemente ubicada mediante la descarga previa de la energía inicial almacenada en el inductor. La razón de trabajo inicial $\mu(t_0)$, puede ser seleccionada arbitrariamente. Esto implica que las cantidades $x(t_0)$ y $x(t_0+\mu_0 T)$ se asumen inicialmente conocidas. Note también que una política de control PWM en base al modelo promedio (5.3) necesariamente requiere la medición en línea de la corriente promedio de entrada, es decir, valores de $x(t)$ deben ser medidos tanto al final de cada pulso, dentro del intervalo de muestreo, como al inicio de cada período de muestreo.

La función de razón de trabajo calculada nunca debe exceder los valores de los límites naturales representados por el intervalo cerrado [0,1]. Las posibilidades de saturación de la actual función de razón de trabajo depende de la derivada temporal de la señal de referencia, del autovalor impuesto en lazo cerrado y de lo parámetros del circuito. Para técnicas de promediación más convencionales (ver Sira-Ramírez *et al* [32]) uno puede obtener una estimación de las limitaciones en el seguimiento del circuito.

5.1 Simulación. La política de seguimiento retroalimentada PWM previamente derivada, sustentada en una discretización exacta y en el modelo promedio introducido, se utiliza sobre el mismo modelo perturbado del convertidor "buck–derivado" que presentamos en (5.19).

Se desea seguir una señal de referencia "trapezoidal", como se muestra en la figura 5.25, con $z_{\max} = 1237$ A.

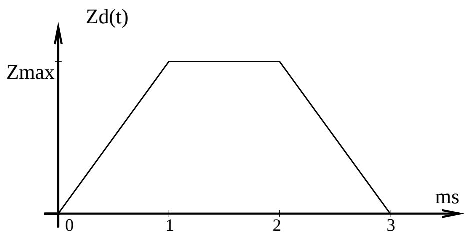

Figura 5.25: Señal Deseada Trapezoidal de la Corriente de Entrada.

Esta señal de referencia es expresada como:

$$z_d(t) = \begin{cases} 1237t & \text{para } 0 < t \leq 1 \text{ ms} \\ 1237 & \text{para } 1 < t \leq 2 \text{ ms} \\ 1237 - 1237(t-2) & \text{para } 2 < t \leq 3\text{ms} \end{cases}$$

La figura 5.26, muestra la trayectoria controlada de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo $\mu(t)$ y su correspondiente función de la posición del interruptor $u(t)$. En esta figura también se expone la señal de perturbación $\nu(t)$. Como se puede observar el controlador obtenido permite que la corriente promedio de entrada siga, bastante bien, a la señal de referencia deseada, siempre y cuando la

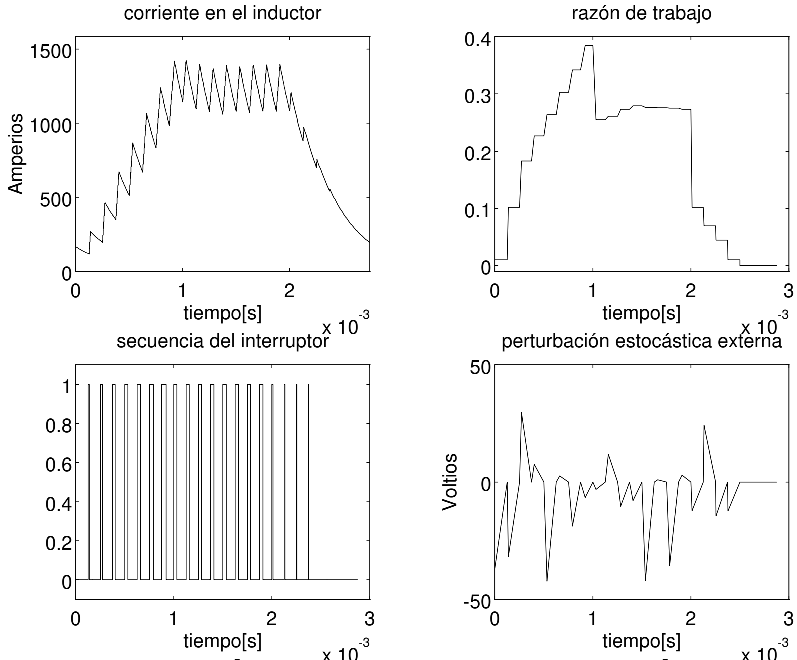

Figura 5.26: Resultados de Simulación para el Problema de Seguimiento, en el "Convertidor Buck–Derivado".

función de razón de trabajo calculada no tome valores fuera del intervalo [0,1]. Note que en las proximidades al final del seguimiento horizontal la función de razón de trabajo μ se "satura" al valor cero. Este problema puede ser evitado por disminuir convenientemente el valor máximo de la señal de referencia deseada $z_d(t)$ así como su pendiente sobre la porción "desendiente" del trapezoide.
□ □ □

Convertidor "Boost–Derivado".

La dinámica del valor promedio de la corriente de entrada, $z(t_k)$, para el convertidor "boost–derivado" se puede obtener siguiendo un procedimiento similar al empleado para el convertidor "buck–derivado". Sustituyendo (5.21) en (5.1), se logra una expresión para $z(t_k)$ en términos de $x(t_k)$ y $\mu(t_k)$. Ahora, si sustituimos (5.23) y (5.25) en (5.2) se puede obtener una ecuación para $z(t_{k+1})$ la cual depende de $x(t_k)$, $\mu(t_k)$ y $\mu(t_{k+1})$. Entonces, se procede a eliminar el estado $x(t_k)$ de las expresiones encontradas. La formula recursiva resultante está dada por :

$$z(t_{k+1}) = \Psi_1^{1-\mu(t_k)} z(t_k) - \Psi_1^{1-\mu(t_k)}\Psi_2 + \Psi_2 + \frac{1}{2}\Psi_3 \left(\Psi_1^{1-\mu(t_k)}\mu(t_k) + \mu(t_{k+1})\right) \quad (5.11)$$

la cual, como en el caso anterior, constituye una representación de estado no–Kalmaniana o más propiamente, una *representación generalizada en el espacio de* *estados*, para la dinámica de la corriente promedio (Fliess [9]).

Supongase que $\lim_{k\to\infty}\mu(t_k)$ existe y asumimos que está dado por el valor constante μ_∞, entonces, el correspondiente valor en estado estacionario, z_∞, de la corriente promedio de entrada, calculado de (5.11), está dado por:

$$z_\infty = \frac{\left[\Psi_3\mu_\infty\left(1+\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)+2\Psi_2\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)\right]}{2\left(1-\Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)} \tag{5.12}$$

el cual corresponde exactamente con el valor en estado estacionario $x_{av(\infty)}$, calculado en (5.29) a partir de consideraciones diferentes.

Seguimiento de la Corriente Promedio de Entrada

Sea $z_d(t)$ la representación de una señal de entrada de referencia deseada variante en el tiempo. Se desea que la corriente promedio de entrada $z(t_k)$ siga asintóticamente los valores muestreados, $z_d(t_k)$ de la señal de entrada de referencia.

Al igual que antes, imponemos la siguiente dinámica de la corriente de entrada sobre el sistema en lazo cerrado,

$$z(t_{k+1}) = \alpha\left(z(t_k)-z_d(t_k)\right)+z_d(t_{k+1}) \tag{5.13}$$

donde asumimos que $z_d(t_{k+1})$ es conocido de antemano.

Sustituyendo la ecuación (5.11) en (5.13), y despejando $\mu(t_{k+1})$, se obtiene el siguiente controlador dinámico, no lineal, retroalimentado y variante en el tiempo, que nos permite el seguimiento de la corriente promedio de entrada,

$$\begin{aligned}\mu(t_{k+1}) \;&=\; \frac{2}{\Psi_3}\Bigg[(\alpha-\Psi_1^{1-\mu(t_k)})z(t_k)-\Psi_1^{1-\mu(t_k)}\left(\frac{1}{2}\Psi_3\mu(t_k)-\Psi_2\right)\\ &-\; \Psi_2-\alpha z_d(t_k)+z_d(t_{k+1})\Bigg]\end{aligned} \tag{5.14}$$

Observación : La inicialización del controlador anterior es efectuada de manera similar a el caso del convertidor “buck–derivado”.

5.2 Simulación. La política de seguimiento retroalimentada PWM previamente derivada, sustentada en una discretización exacta y en el modelo promedio introducido, se empleó sobre el mismo modelo perturbado del convertidor “boost–derivado” que presentamos en (5.37).

Se requirió el seguir una señal de referencia “trapezoidal”, similar a la que se muestra en la figura 5.25, con $z_{\max} = 6000$ A. En conformidad con el caracter “step–up” del convertidor “boost–derivado”, la señal de referencia $z_d(t)$ está representada por:

$$z_d(t) = \begin{cases} 4500+1500t & \text{para } 0<t\le 1 \text{ ms}\\ 6000 & \text{para } 1<t\le 2 \text{ ms}\\ 6000-1500(t-2) & \text{para } 2<t\le 3\text{ms}\end{cases}$$

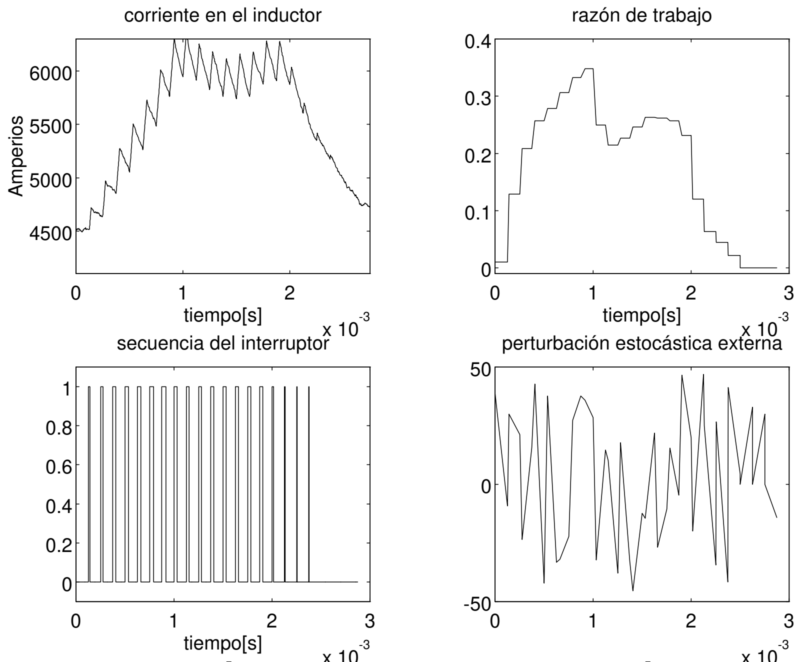

Figura 5.27: Resultados de Simulación para el Problema de Seguimiento, en el Convertidor "Boost–Derivado".

La figura (5.27), muestra la trayectoria controlada de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo $\mu(t)$ y su correspondiente función de la posición del interruptor $u(t)$. En esta figura también se expone la señal de perturbación $\nu(t)$. Como se puede observar el controlador obtenido permite que la corriente promedio de entrada siga, bastante bien, a la señal de referencia deseada, mientras la función de razón de trabajo calculada no tome valores fuera del intervalo [0,1].
□ □ □

Convertidor "Buck-Boost–derivado".

En esta sección resumiremos la formulación que conlleva a un regulador PWM en tiempo discreto para el problema de seguimiento de una señal de referencia para el caso del convertidor "buck–boost–derivado".

Representación de estado generalizado de la dinámica de la corriente promedio de entrada.

$$z(t_{k+1}) = \Psi_1^{1-\mu(t_k)} z(t_k) - \frac{1}{2}\Psi_3 \left(\Psi_1^{1-\mu(t_k)} \mu(t_k) + \mu(t_{k+1}) \right) \tag{5.15}$$

Valor en estado estacionario de la corriente promedio de entrada.

$$z_\infty = -\frac{\Psi_3 \mu_\infty}{2} \frac{\left(1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}\right)}{1 - \Psi_1^{1-\mu_\infty}} \tag{5.16}$$

la cual coincide con (5.46)

Dinámica lineal deseada en lazo cerrado.

$$z(t_{k+1}) = \alpha \left(z(t_k) - z_d(t_k) \right) + z_d(t_{k+1}) \tag{5.17}$$

Sintetizador dinámico de la razón de trabajo.

$$\mu(t_{k+1}) = \frac{2}{\Psi_3} \left[(\Psi_1^{1-\mu(t_k)} - \alpha) z(t_k) - \frac{1}{2} \Psi_1^{1-\mu(t_k)} \Psi_3 \mu(t_k) + \alpha z_d(t_k) - z_d(t_{k+1}) \right] \tag{5.18}$$

5.3 Simulación. La política de seguimiento retroalimentada PWM previamente derivada se emplea sobre el modelo perturbado del convertidor "buck–boost–derivado" (5.51).

Una señal de referencia "trapezoidal" invertida con $z_{max} = -1500A$, fué usada en este caso, y ella está dada por :

$$z_d(t) = \begin{cases} -1500t & \text{para } 0 < t \leq 1 \text{ ms} \\ -1500 & \text{para } 1 < t \leq 2 \text{ ms} \\ -1500 + 1500(t-2) & \text{para } 2 < t \leq 3\text{ms} \end{cases}$$

En la figura 5.28 se muestran los resultados obtenidos, y en base a ellos podemos afirma que el controlador propuesto efectúa el seguimiento de la señal de referencia dada mientras exhibe un alto grado de robustez con respecto a la señal de perturbación estocástica externa.

□ □ □

Como pudimos observar, el problema de seguimiento fué resuelto satisfactoriamente, mediante la determinación de controladores de seguimientos basados en los modelos promedios de la corriente de entrada en el inductor. La válidez de esos modelos promedios fué verificada a través el cálculo del comportamiento promedio en estado estacionario de cada convertidor. Los valores, en estado estacionario, de la corriente promedio de entrada predichos por los modelos promedios propuestos, corresponden exactamente con los valores encontrados mediante consideraciones sobre el estado estacionario del "rizo" de la corriente de entrada asociada con las trayectoria reguladas vía PWM. Los controladores diseñados son de naturaleza explícita, por lo que no se requirió emplear resolución numérica.

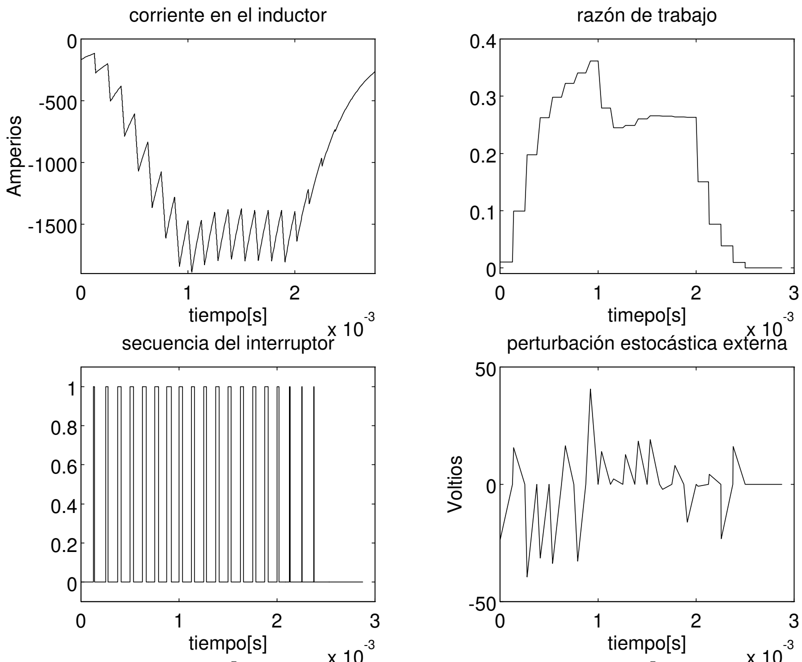

Figura 5.28: Resultados de Simulación para el Problema de Seguimiento, en el Convertidor "Buck–Boost–Derivado".

□ □ □

Conclusiones.

Se mostró que los tradicionales modelos de estado promedio, o modelos de frecuencia de conmutación infinita, de los convertidores de potencia DC–DC "buck", "boost" y "buck–boost" son sistemas de Euler–Lagrange.

Sintetizadores de la razón de trabajo, en base a técnicas de pasividad, fueron desarrollaron para la estabilización indireta del voltaje promedio de salida de los convertidores de potencia DC–DC de los tipos "boost", "buck–boost", y "buck". Los controladores se diseñaron primeramente bajo la suposición del conocimiento perfecto de las resistencias de carga y entonces, se extendieron al manejo, en una forma adaptativa, de casos más realistas donde las cargas resistivas son de valor constante pero desconocido. El método propuesto se fundamenta en una combinación del moldeado de la energía en lazo cerrado y una apropiada inyección de amortiguamiento estabilizante a través de una retroalimentación dinámica del estado lo cual conduce a un comportamiento en lazo cerrado asintóticamente estable.

El estudio muestra que la regulación directa del voltaje de salida conlleva a controladores inestable en los convertidores "boost" y "buck–boost". En el caso de convertidor "buck", sin embargo, ambos esquemas de regualción de voltaje; directa e indirectamente, son igualmente factibles debido a la ausencia de la dinámica de ceros en el primer caso y al correspondiente carácter de fase mínima en el segundo caso.

Los modelos promedio de los convertidores de potencia DC–DC han sido identificados como sistemas *diferencialmente planos* (ver Fliess *et al* [10]) ya que todas las variables del sistema son funciones diferenciales de la energía total del sistema, las cuales entonces califican como *salidas linealizantes*. Así, se puede proponer una interesante línea de investigación que resida sobre la posibilidad de explotar las propiedades diferencialmente planas del sistema en conexión con las posibilidades de moldear la energía e inyección de amortiguamiento, es decir, las técnicas de diseño de controladores mediante pasividad. Similarmente controladores en régimen deslizante en base a consideraciones de pasividad también pueden ser desarrollados para convertidores de potencia DC–DC.

Por otro lado, se han propuesto esquemas de discretización exacta para la estabilización de la corriente de entrada en los convertidores de potencia DC–DC derivados del tipo "buck", "boost" y "buck–boost". Los controladores obtenidos presentan una forma altamente no lineal, y en el caso de los convertidores "boost" y “back–boost”, tales compensadores no se pueden expresar explicitamente y por lo tanto se requirió resolver, en línea, ecuaciones transcendentales para cada instante de muestreo.

Para tales convertidores, el problema de seguimiento de una señal fué solventado a través de una representación de estado no–Kalmaniana de la corriente promedio de entrada, y con la ayuda de una política de Modulación de Anchura de Pulso (PWM) se encontraron controladores dinámicos explicitos.

Algunas de las dificultades que surgen al tratar de imponer esquemas de discretización exacta en los convertidores de una dimensión aquí tratados se convierten, como era de esperarse, en mucho mayores cuando se trata con los modelos tradicionales de segundo orden de los convertidores DC–DC. En tales casos, las tareas de manipulasión simbolica asociadas con la solución de los problemas de estabilización resultan particularmente complicadas, aún con la ayuda de eficientes paquetes de computación tales como el Maple, o el Mathematica.

Como un tópico de investigaciones futuras, parece interesante y es de particular interes práctico, el desarrollo de *controladores adaptativos* no lineales, en tiempo discreto, para los problemas de estabilización y seguimiento de convertidores derivados con *parámetros inciertos*.

Bibliografía

[1] BERGHUIS, H. Y NIJMEIJER, H., (1993). "A Passivity Approach to Controller–Observer Design for Robots". *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* **TRA-9,** 740–754.

[2] BOSE, B. K., (1992). *Modern Power Electronics: Evolution, Technology and Applications*. New York: IEEE Press.

[3] BROGLIATO, B., ORTEGA, R. Y LOZANO, R., (1995). "Globally Stable Nonlinear Controllers for Flexible Joint Manipulators: A Comparative Study". *Automatica*, **31,** (a ser publicado).

[4] CÚK, S., (1976). "Modeling, Analysis and Design of Switching Converters". PhD Thesis, CALTECH, Pasadena, CA.

[5] CZAKI, F., GANSKY, K., IPITZ, I. Y MARTI, S., (1983). *Power Electronics.* Akademia Kiado : Budapest, Hungary.

[6] EHSANI, M., KUSTOM, R.L., Y FUJA, R.E., (1983). "Microprocessor Control of a current source dc–dc converter". *IEEE Transactions on Industry Applications*, **IA–19**, 5, pp. 690–698.

[7] FILIPPOV, A. F., (1988). *Differential Equations with Discontinuos Right–Hand Sides.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

[8] FLIESS, M., (1990). "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics". *IEEE Transactions on Automatic Control.* **AC–35,** 994-1001.

[9] FLIESS, M., (1992). "Reversible Linear and Nonlinear Discrete–time Dynamics", *IEEE Transactions on Automatic Control.* **AC–37**, 8, pp. 1144–1153.

[10] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P. Y ROUCHON, P., (1992). "Sur les systèmes linéaires différentiellement plats," *C.R. Acad. Sci. Paris.* **315,** Serie I, 619–624.

[11] GARCÍA, M. , PEREZ , R., Y SIRA–RAMÍREZ, H., (1995). "Regulation of Derived DC–to–DC Power Supplies: A Pulse–Frequency–Modulation Approach". (sujeto a publicación).

[12] Kassakian, J.G., Schlecht, M. y Verghese, G. C., (1991). *Principles of Power Electronics*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[13] Krein, Ph., Bentsman, J., Bass, R. y Lesieutre, B., (1990). "On the Use of Averaging for the Analysis of Power Electronic Systems". *IEEE Transactions on Power Electronics*, **5,** 182–190.

[14] Meisel, J. (1966). *Principles of Electromechanical Energy Conversion*, Mc-Graw Hill, New York.

[15] Middlebrook, R. D. y Ćuk, S., (1981). *Advances in Switchmode Power Converter Circuits*. Tesla: Pasadena, California.

[16] Middlebrook, R. D., y Cúk, S., (1976). "A General Unified Approach to Modelling Switching–Converter Power Stages". *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, (PESC), pp. 18–34.

[17] Middlebrook, R. D. y Ćuk, S., (1983). *Advances in Switchmode Power Converter Circuits*. Tesla: Pasadena, California.

[18] R.D. Middlebrook and S. Ćuk, "A General Unified Approach to Modeling Switching Converter Power Stages" in *International Journal of Electronics* Vol. 42, No. 6, pp. 521–550, 1977.

[19] Mohan, N., Undeland, T. Rpbbins, W. P., (1989). *Power Electronics, Converters, Applications and Design*. Wiley: New York

[20] Ortega, R. y Espinosa, G., (1993). "Torque Regulation of Induction Motors". *Automatica*, **29,**621–633.

[21] Ortega, R., Loría, A., Kelly, R. y Praly, L., (1994). "On Passivity–Based Output Feedback Global Stabilization of Euler–Lagrange Systems". In *Proc. of the 33d IEEE Conference on Decision and Control*, **1,** 381–386, Lake Buena Vista, Florida.

[22] Ortega, R. y Spong, M., (1989). "Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial". *Automatica*, **25,** 877–888.

[23] Rashid, M. (1992). *Power Electronics, Circuits, Devices and Applications*, Prentice Hall International, London.

[24] Sanders, S. R. y Verghese, G.C., (1992). "Lyapunov–Based Control for Switched Power Converters". *IEEE Transactions on Power Electronics*,**7,** 17–24.

[25] Severns, R. P. y Bloom, G. E., (1982). *Modern DC–to–DC Switchmode Power Converter Circuits*, Van Nostrand Reinhold, New York.

[26] Sira–Ramírez, H., (1987). "Sliding Motions in Bilinear Switched". *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **CAS-34,** 919-933.

[27] Sira–Ramírez, H., (1989). "A Geometric Approach to Pulse-Width-Modulated Control in Nonlinear Dynamical Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-34,** 184-187.

[28] Sira–Ramírez, H., (1991). "Nonlinear P-I Controller Design for Switch-mode DC-to-DC Power Converters". *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **CAS-38,** 410-417.

[29] Sira–Ramírez, H., García–Esteban, M., y Pérez–Moreno, R. (1995). " Design of Pulse–Width–Modulation Controllers for Stabilization and Tracking in Derived DC–to–DC Power Converters." *International Journal Control* (aceptado para publicación).

[30] Sira–Ramírez, H. y Ilic, M., (1989). "Exact Linearization un Switch Mode DC–to–DC Power Converters". *International Journal of Control*, Vol. **50,** 511–525.

[31] Sira–Ramírez, H. y Lischinsky–Arenas, P., (1991). "The Differential Algebraic Approach in Nonlinear Dynamical Compensator Design for DC-to-DC Power Converters". *International J. of Control*, **54,** 111-134.

[32] Sira–Ramírez, H., Lischinsky–Arenas, P. y Llanes–Santiago, O., (1992). "Dynamic Compensator Design in Nonlinear Aerospace Systems". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **29,** 374-369.

[33] Sira–Ramírez, H. y Llanes–Santiago, O., (1993). "A Unified Approach to Dynamical Discontinuous Feedback Control of a Double Effect Evaporator". *Proc. of the 12th World Congress of the IFAC*, Sydney Australia, Vol. **4,** 427–430.

[34] Sira–Ramírez, H., Ortega, R., Pérez–Moreno, R. y García–Esteban, M., (1995). "Passivity–Based Controllers for the Stabilization of DC–to–DC Power Converters". *Automatica* (sujeto a publicación).

[35] Sira–Ramírez, H. y Rios–Bolívar, M., (1994). "Sliding Mode Control of DC-to-DC Power Converters via Extended Linearization". *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I* . **41,** 652–661.

[36] Sira–Ramírez, H., Rios–Bolívar, M. y Zinober, A. S. I., (1995). "Adaptive Input–Output Linearization for PWM Regulation of DC–to–DC Power Converters", in *Proc. 1995 American Control Conference*, Seattle, Washington, June 21–23, (a ser publicado).

[37] Sira-Ramírez, H., Tarantino-Alvarado, R. y Llanes–Santiago, O., (1993). "Adaptive Feedback Stabilization in PWM Controlled DC-to-DC Power Supplies". *International Journal of Control*, Vol. **57,** 599-625.

[38] Skoog, R. y Blankenship, G., (1970). "Generalized Pulse–Modulated Feedback Systems : Norms, Gains, Lipschitz Constans and Stability". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. **4,** 427–430.

[39] Takegaki, M. y Arimoto, S., (1981). "A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators". *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. **102,** ??–??.

[40] Venkataramanan, V., Sabanovic, A. y Cúk, S., (1985). "Sliding Mode Control of DC–to–DC Converters". In *Proc. IECON'85* 251–258.

[41] Benvenuti, L., Di Benedetto, M.D., Grizzle, J.W. 1992. Approximate Output Tracking for Nonlinear Non-Minimum Phase Systems with Applications to Flight Control, Report CGR-92-20, Michigan Control Group Reports, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

[42] Fliess, M. (1989). Nonlinear Control Theory and Differential Algebra, in *Modeling and Adaptive Control*, Ch. I. Byrnes and A. Khurzhansky (Eds.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, **105**, Springer-Verlag.

[43] Fliess, M. and Sira-Ramírez, H. 1993. Regimes Glissants, Structures Variables Linéaires et Modules, *C. R. de la Acad. de Sci. Paris, Serie I, Automatique*, 703-706.

[44] Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems*, 2nd Edition, New York: Springer-Verlag.

[45] Kanellakopoulos, I.,Kokotović, P.V. and Morse, A.S. 1991a. Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, No. 11,

[46] Kanellakopoulos, I., Kokotović, P.V. and Morse, A.S. 1991b. A Toolkit for Nonlinear Feedback Design, Report CCEC-91-0619, University of California, Santa Barbara.

[47] Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V. and Morse, A.S. 1991c. Adaptive Output Feedback Control of a Class of Nonlinear Systems, *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, **2**, Brighton, England, December 1991, 1082-1087.

[48] KARSENTI, L. and LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. 1995a. Adaptive Feedback Control for Nonlinear Systems using Backstepping and Sliding-Mode Designs, submitted for publication.

[49] KRSTIĆ, M., KANELLAKOPOULOS, I. and KOKOTOVIC, P.V. 1992. Adaptive Nonlinear Control without Overparametrization, *Systems and Control Letters*, **19**, 177-185.

[50] RUGH, W.J. 1989. *The Extended Linearization Approach for Nonlinear Systems Problems*, in *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, FLIESS, M. and HAZEWINKEL, M. eds, Dordrecht: Reidel, 285-309.

[51] SASTRY, S. and M. BODSON, M. 1989. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[52] SASTRY, S. and ISIDORI, A. 1989. Adaptive Control of Linearizable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-34**, No. 11,

[53] SIRA-RAMÍREZ, H. 1989a. Switched Control of Bilinear Converters via Pseudolinearization , *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **CAS-36**, No. 6. 858-865.

[54] SIRA-RAMÍREZ, H. and LLANES-SANTIAGO, O. 1993. On the Adaptive Control of PWM Switch-Regulated Systems, *Proc. 10th IFAC World Congress*. Sidney, Australia, July 1993.

[55] SIRA-RAMÍREZ, H. and PRADA-RIZZO, M.T. 1992. Nonlinear Feedback Regulator Design for the Ćuk Converter, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**, No. 8, 1173-1180.

[56] H. Sira-Ramírez y O. Llanes-Santiago, " Adaptive PWM Regulation Schemes in Swiched Controlled Systems" *Proc. of the 12th World Congress of the IFAC*, Sydney, Australia, Vol. 10, pp. 57–60, 1993.

[57] J.J. E. Slotine and J. K. Hedrick, "Robust Input–Output Feedback Linearization", *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 5, pp. 1133–1140, 1993.

[58] G. Bartolini and A. Ferrara, "Variable Structure Approach to the Pole Assignment Control of Non–minimum Phase Systems," *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 5, pp. 1063–1078, 1993.

[59] G. Conte, C. Moog and A. Perdon,"Un théoreme sur la repersentation entrée–sortie d'un système non linéaire", *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, Serie I, vol. 307, pp. 363–366, 1988.

[60] S. Diop, "A State Elimination Procedure for Nonlinear Systems," *New Trends in Nonlinear Control Theory*, J. Decusse, M. Fliess, A. Isidori and D. Leborgne (Eds.). Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 122, Springer–Verlag, New York, 1989.

[61] S., Abu el Ata-Doss and M., Fliess., "Nonlinear Predictive Control by Inversion," *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, Preprints, pp. 70-75, Capri, June 14-16, 1989.

[62] S., Abu el Ata-Doss, A., Coïc and M., Fliess, "Nonlinear Predictive Control by Inversion: Discontinuities for Critical Behavior," *International Journal of Control*, Vol. 55, No. 6, pp. 1521-1533, 1992.

[63] V.I., Utkin, *Sliding Modes and Their Applications in Variable Structure Systems*, MIR Publishers, Moscow 1978.

[64] H. Sira–Ramírez, M. Zribi and S. Ahmad, "Adaptive Dynamical Feedback Regulation Strategies for Linearizable Uncertain Systems", *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 1, pp. 121–139, 1993.

[65] G. Campion and G. Bastin, "Indirect Adaptive State Feedback Control of Linearly Parametrized Non–linear Systems," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol 4., No. 3, pp. 345–358, 1990.

[66] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.